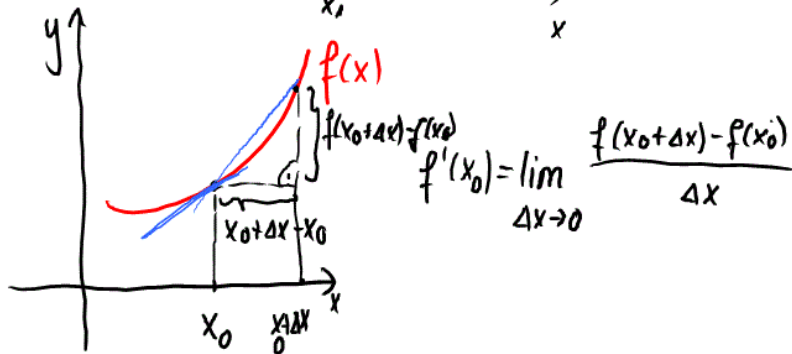
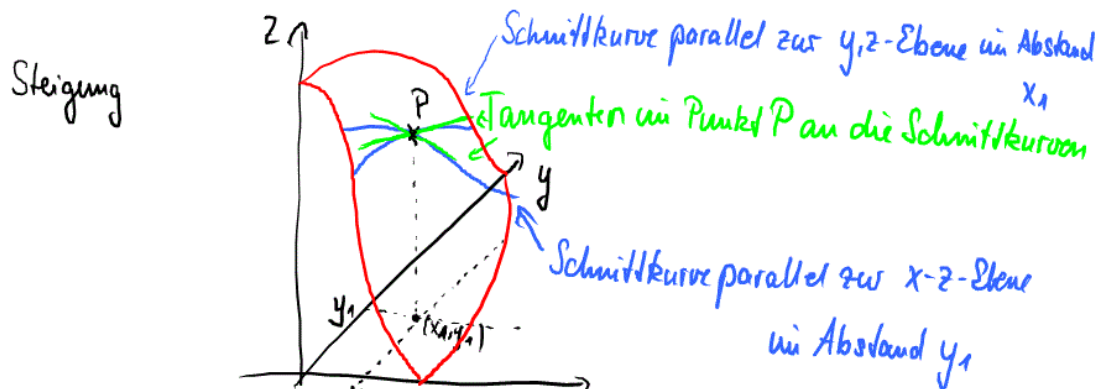
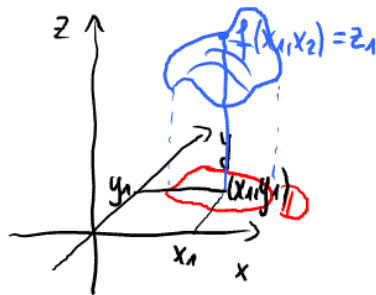


Vorlesung Mathematik

25.5.2016

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow z \quad z \in \mathbb{R}$$



Partielle Ableitungen 1. Ordnung für 3D-Fkt. $z = f(x, y)$

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Merke: die partiellen Ableitungen 1. Ordnung
sind wieder Funktionen mit 2 unabh. Variablen

Partielle Ableitungen 1. Ordnung von Fkt. mit n unabh. Variablen

Es gibt n Stück!

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \boxed{x_i + \Delta x_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, \boxed{x_i}, \dots, x_n)}{\boxed{\Delta x_i}} \\ &= f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

partielle Ableitung 1. Ordnung nach x_i

Die Ableitungen 1. Ordnung werden üblicherweise in einem Vektor
zusammengefaßt, dem Gradient

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Bp. für partielle Ableitungen

$$1) z = f(x, y) = x^n \cdot y^m$$

$$f_x(x, y) = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m$$

$$f_y(x, y) = m \cdot y^{m-1} \cdot x^n$$

$$2) z = f(x, y) = x \cdot \ln y$$

$$f_x(x, y) = \ln y$$

$$f_y(x, y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

$$3) z = f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$$

$$f_x(x, y) = \cos x \cdot \cos y$$

$$f_y(x, y) = \sin x \cdot (-\sin y)$$

$$4) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^2 + 3\sin(x_2) + 20x_3 - \ln(x_4)$$

$$f_{x_1} = 10x_1$$

$$f_{x_2} = 3\cos(x_2)$$

$$f_{x_3} = 20$$

$$f_{x_4} = -\frac{1}{x_4}$$

Bp: Berechnen Sie die "Steigungen" im Punkt $(x, y) = (2, 1, f(x, y))$

$$f(x, y) = 2x \cdot y - 3x^2 + \frac{1}{y}$$

$$f_x(x,y) = 2y - 6x \quad f_x(2,1) = 2 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = -10$$

$$f_y(x,y) = 2x - \frac{1}{y^2} \quad f_y(2,1) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{1^2} = 3$$

$$\text{Bp: } z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - e^{2xy} + 3x$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x - e^{2xy} \cdot 2y + 3$$

Kettenregel innere Abl.

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x \cdot e^{2xy}$$

$$\text{Bp: } u(x,y,z) = 2x \cdot e^{yz} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u_x(x,y,z) = 2 \cdot e^{yz} + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2 \cdot e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_y(x,y,z) = 2x \cdot z \cdot e^{yz} + \frac{1 \cdot 2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2xz e^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u_z(x,y,z) = 2xy e^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Bp. für das Selbststudium:

$$f(x,y) = \frac{e^x \cdot \sin y}{e^y \cdot \cos x}$$

Bestimmen Sie f_x und f_y

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Analysis I : $f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow \dots$

3 D - Fkt : $f(x,y)$

Fkt. m. 2 Var.

f_x $\rightarrow$ f_{xx} f_{xy}

f_y $\rightarrow$ f_{yx} f_{yy}

2 part. 4 part.
Abl. Abl.
1. Ordnung 2. Ordnung

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Hesse'sche Matrix

Jacobi-Matrix

Funktionalmatrix

Hessematrix für Fkt. m. n unab. Variablen

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

$n \times n$ - Matrix