# Vorlesung Mathematik

## 30.5.2016

### Hesse'sche Matrix

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ & & & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

Bp: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 x_3 + x_3$

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse Matrix für $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$

bzw. $(x_1, x_2, x_3) = (1,-1,-1)$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 \cdot x_3$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = x_2^3 + 1$$

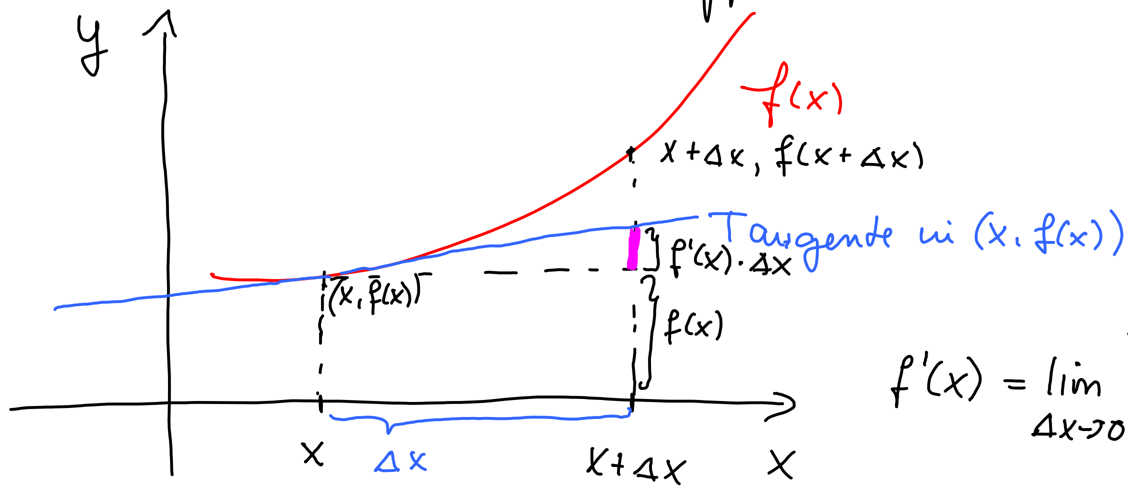
$$\operatorname{grad} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f(1,-1,-1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_2 \cdot x_3 & 3x_2^2 \\ 0 & 3x_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

# Partielles und Totales Differenzial




$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Die Werte $f(x+\Delta x)$ und der Wert $f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ unterscheiden sich umso weniger, je kleiner $\Delta x$ ist.

**Linearisierung einer Funktion**

(Tangente ist eine Gerade und somit linear!)

Für $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big( f(x+\Delta x) - f(x) \big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$= f'(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$

$$df = f'(x) \cdot dx$$

heißt das Differenzial der Funktion $f(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

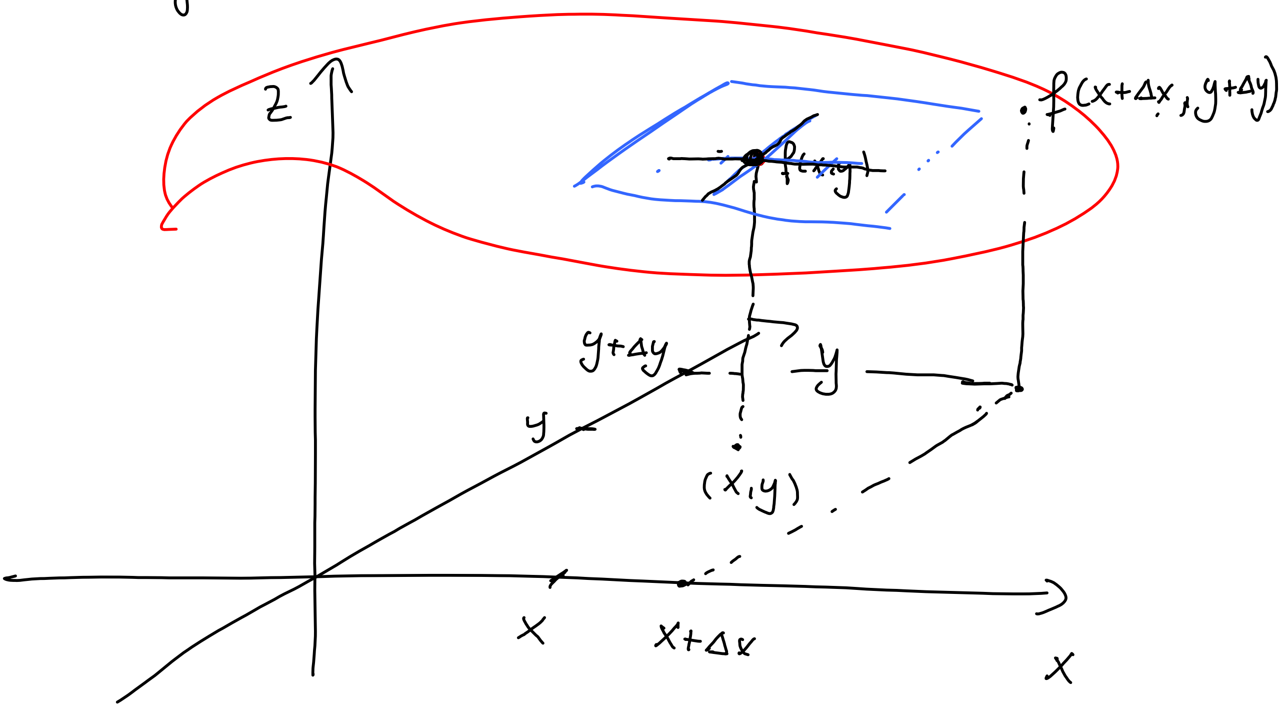
Def: $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Das partielle Differenzial der Fkt. $f$ nach $x_i$ lautet

$$f_{x_i} \cdot dx_i \qquad i = 1, \dots, n$$

Vorbetrachtungen zum totalen Differenzial




Herleitung der Gleichung der Tangentialebene in einem Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ falls $z = f(x,y)$

$$z = ax + by + c \qquad \text{Gleichung einer Eben}$$

$$z_x = a \qquad f_x(x,y)$$
$$z_y = b \qquad f_y(x,y)$$

Im Berührpunkt gilt: $a = f_x(x_0, y_0)$
$b = f_y(x_0, y_0)$

Der Berührpunkt liegt auf der Tangentialebene

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c$$

$$\Rightarrow \quad c = z_0 - a x_0 - b y_0$$

$$\Rightarrow \quad \underset{*}{c} = z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0$$

Mit $*$ gilt:

$$z = \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{a} \cdot x + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{b} \cdot y + \underbrace{z_0 - f_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_y(x_0, y_0) \cdot y_0}_{c}$$

und damit

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Gleichung der Tangentialebene im Berührpunkt

Berechnung der Änderung der Höhenkoordinate auf der Tangentialebene:

$$\underbrace{z - z_0}_{dz} = f_x(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{x_0 + \Delta x - x_0} + f_y(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{y_0 + \Delta y - y_0}$$

$$\underbrace{dz = f_x(x_0, y) \, dx + f_y(x_0, y_0) \, dy}_{\text{Totale Differenzial}}$$

Beispiele

1) Wie lautet das totale Differenzial von

$$z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot dy$$

Gegeben in der $(x,y)$-Ebene ist der Punkt $P(2,1)$

$P$ werde verschoben nach $(2.5\,;\,1.75)$

Berechnen Sie näherungsweise den Zuwachs der Höhenkoordinate bei dieser Verschiebung

$x = 2$
$y = 1$
$dx = 0.5$
$dy = 0.75$

$$dz = \frac{2 \cdot 2}{2^2+1^2} \cdot 0.5 + \frac{2 \cdot 1}{2^2+1^2} \cdot 0.75$$

$$= 0.7$$

Vergleich mit der tatsächlichen Höhenkoordinatenänderung:

$$\Delta z = \left| f(2,1) - f(2.5;1.75) \right|$$

$$= \left| \ln(4+1) - \ln(2.5^2 + 1.75^2) \right|$$

$$= \left| \ln 5 - \ln 9.312 \right|$$

$$= 0.62$$

weitere Frage: $P(2,1)$ wird verschoben in den Punkt $P^*(1;0.5)$

$x=2$
$y=1$
$dx=-1$
$dz=-0.5$

$$dz = \frac{2\cdot 2}{5}(-1) + \frac{2\cdot 1}{5}(-0.5) = -1$$

$$\Delta z = \left| f(1,0.5) - f(2,1) \right|$$

$$= \left| \ln 1.25 - \ln 5 \right| = \left| -1.39 \right|$$

$$= 1.39$$

2) Geg: $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Frage: Wie ändert sich annähernd (über das totale Differenzial) der Funktionswert für $A(1,2,0)$ bei Verschiebung nach $B(0.9;2.2;-0.1)$?

$x=1$
$y=2$
$z=0$
$dx=-0.1$
$dy=+0.2$
$dz=-0.1$

$$r_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$dr = r_x\,dx + r_y\,dy + r_z\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-0.1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(0.2) + \frac{0}{\sqrt{5}}\cdot(-0.1)$$

$$= \frac{-0.1 + 0.4 + 0}{\sqrt{5}} = 0.1342$$

$$\Delta r = \left| r(1,2,0) - r(0.9; 2,2; -0.1) \right|$$

$$= 0.143$$