

Mathe 2 Vorlesung 1.6.2016

Weggelassen wird:

- Differenzieren impliziter Funktionen mit Hilfe der mehrdim. Analysis
(Fkt. in 1 unabh. Variablen in der Form $F(x,y)=0$)

- Differenzieren von Fkt. in Parameterdarstellung

$$x(t), y(t)$$

bei Bedarf "nacharbeiten" !

Extremwerte für Fkt. mit mehreren unabhängigen Variablen

Analysis I:



notwendig : $f'(x) = 0$

hinreichend : $f''(x) > 0$

Analysis II



notwendig : $f_x(x,y) = 0$

$f_y(x,y) = 0$

hinreichend : ?

Formulierung von hinreichenden Bedingungen:

Geg. $z = f(x, y)$

f besitzt an der Stelle (x_0, y_0) einen Extremwert

$\Leftrightarrow$

1) $f_x(x_0, y_0) = 0 \quad f_y(x_0, y_0) = 0$ notwendig

2) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen folgende Gleichung:

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

Falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max.}$

$f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min.}$

Falls $\Delta < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt in } (x_0, y_0)$

Falls $\Delta = 0 \Rightarrow \text{keine Entscheidung möglich}$

NB: $H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

Hesse Matrix

Was ist Δ ?

Δ ist die Determinante von H

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy} f_{yx} \\ = f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

Extremwerte für Funktionen mit n unabhängigen Variablen
(Fall $n=2$ steckt hier mit drin!)

Geg: $z = f(x_1, \dots, x_n)$ $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$
Kandidat

notwendig: $\text{grad } f(\bar{x}) = 0$
sämtliche partielle Abl. 1. Ordnung
"verschwinden"

hinreichend:

$$H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & \dots & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

NB: $H(\bar{x})$ ist symmetrisch (Satz von Schwarz)

Bilde H_i $i=1, \dots, n$ Hauptunterdeterminanten

H_i ist die Determinante der Matrix, die nach
Streichung der letzten $n-i$ Zeilen und Spalten
aus H entsteht

Nun: hinreichendes Kriterium

$\bar{x}$ lokales Maximum $\Leftrightarrow H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, \dots$
 $H_n \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

$\bar{x}$ lokales Minimum $\Leftrightarrow \underline{H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0, \dots}$

Fall $n=2$: $H_1 = |f_{x_1 x_1}| = f_{x_1 x_1}$

$$H_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{vmatrix} = f_{x_1 x_1} f_{x_2 x_2} - f_{x_1 x_2}^2 = \Delta$$

Max. $\Leftrightarrow f_{x_1 x_1} < 0$ Min. $\Leftrightarrow f_{x_1 x_1} > 0$

$\Delta > 0$

$\Delta > 0$

$H_2 > 0 \quad H_1 < 0$

$H_2 > 0 \quad H_1 > 0$

Bp: $f(x,y) = x^3 - 12xy + 6y^2$

Überprüfen Sie, ob $f(x,y)$ Extremwerte besitzt und wenn ja, welcher Art?

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 12y = 0 \quad f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 12$$

$$f_y(x,y) = -12x + 12y = 0 \quad f_{xy} = -12 \quad f_{yx} = -12$$

I $3x^2 - 12y = 0$

II $-12x + 12y = 0 \Leftrightarrow 12x = 12y \Leftrightarrow x = y$ *

* in I: $3x^2 - 12x = 0 \quad |:3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ mit } * y_1 = 0$$

$$\text{oder } x-4=0 \Rightarrow x=4, \text{ d.h. } x_2=4 \text{ mit } * y_2=4$$

Damit 2 "Kandidaten": $(0,0)$ und $(4,4)$

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 12 \quad f_{xy} = -12$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(0,0) = -144 < 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0,0)$

$$H(4,4) = \begin{pmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Delta(4,4) = 144 > 0$$

$\Rightarrow$ Extremwert bei $(4,4)$

$$f_{xx}(4,4) = 6 \cdot 4 = 24$$

$$f_{xx}(4,4) > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum bei $(4,4)$

$$\text{d.h. } (4,4, -32)$$

Bp: $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 \cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$

$$1) \text{I } f_{x_1} = (3x_1^2 - 3) \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} = 0$$

$$\text{II } f_{x_2} = -2x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{III } f_{x_3} = x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

$$\text{Aus I: } 3x_1^2 - 3 = 0 \quad (\Rightarrow) 3x_1^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_{11} = 1 \\ x_{12} = -1$$

$$\text{Aus II und III: } \text{II} - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \text{III } x_2 - 2x_3 + 3 = 0$$

$$\text{II} + 2 \cdot \text{III} : -3x_3 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2 \quad *$$

$$* \text{ in II: } -2x_2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

Kandidaten:

$$x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} + (3x_1^2 - 3)^2 \cdot e^{x_1^3 - 3x_1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_3 = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} 18e^{-2} > 0$$

$$H_3 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -12e^{-2} < 0$$

$$H_2 < 0$$

$$H_1 = |6e^{-2}| = 6e^{-2} > 0$$

$$H_1 > 0$$

$$H_3 > 0 \quad H_2 < 0 \quad H_1 > 0$$

Für $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann keine Entscheidung getroffen werden!

$$x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_3 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} -18e^2 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -6e^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12e^2 > 0$$

$$H_1 = [-6e^2] = -6e^2 < 0$$

$$H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$$

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum

an der Stelle $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$