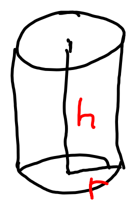
Vorlesung Mathe 2
6.6.2016

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Zur Erinnerung:
Dosenproblem



Dosen mit Volumen 1 l
minimaler Materialverbrauch

Zielfunktion: Zylinderoberfläche

$$O(r,h) = \underbrace{2\pi \cdot r^2}_{\text{Boden + Deckel}} + \underbrace{2\pi r \cdot h}_{\text{Mantel}}$$

Nebenbedingung: $V(r,h) = \pi r^2 \cdot h = 1000\,cm^3$ $(=1\,l)$

Bisher sind wir wie folgt vorgegangen:

Nebenbed. z.B. nach h aufgelöst:

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

h wird in die Zielfunktion eingesetzt

$$O(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Extremwertberechnung: $O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$

notw: $O'(r) = 0$

$$4\pi r = \frac{2000}{r^2} \quad \Big| \cdot r^2 / 4\pi$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

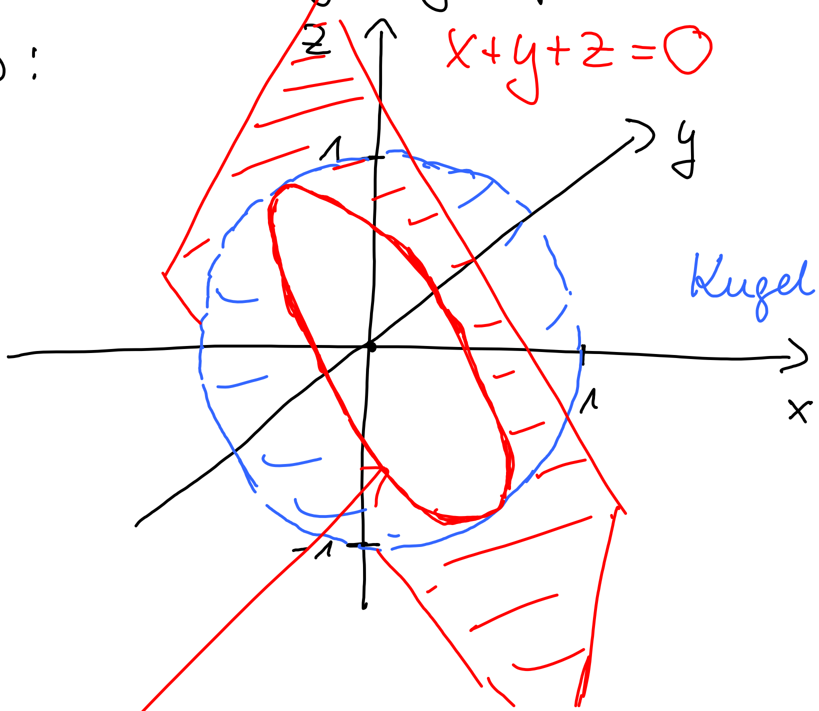
$$h = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2}$$

$$O''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$$

$$O''(r) > 0 \quad \Rightarrow \text{Min}$$

Es gibt Problemstellungen, wo mehr als eine Nebenbedingung gelten soll!

Bp:

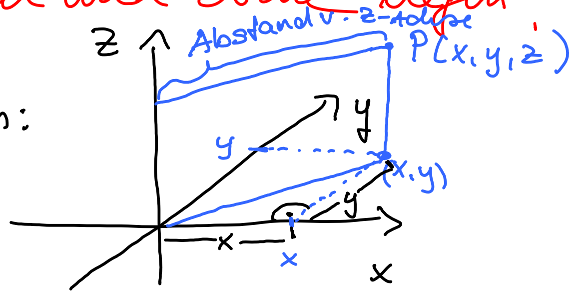


Kugel: $x^2+y^2+z^2=1$

Kugel: Mittelpunkt Ursprung $r=1$

Punkte, die auf Kugel und Ebene liegen!

Zielfunktion formulieren:



$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ Abstand von der z-Achse

Mathematische Formulierung des Problems:

Man bestimme Minima und Maxima der Funktion $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

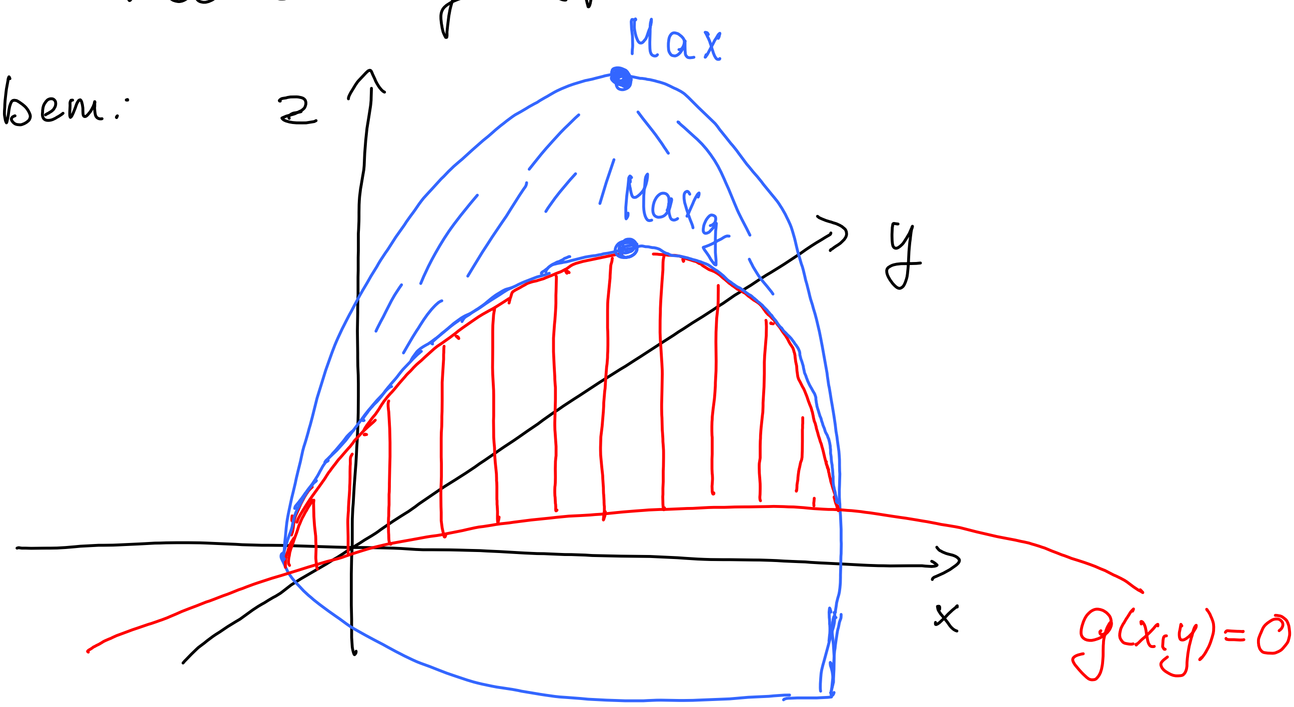
Unter den Nebenbedingungen

$$x^2+y^2+z^2 = 1$$
$$x+y+z = 0$$

Funktion mit 3 unabhängigen Variablen und 2 Nebenbedingungen

Solche Probleme werden mit der Lagrange-Methode gelöst

Vorbem.:

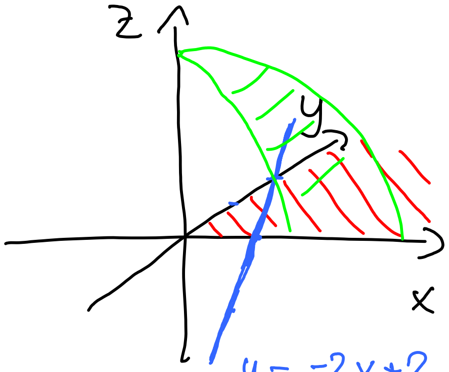


$g(x,y)=0$ heißt die Nebenbedingung oder Restriktion

Restriktion: Einschränkung des Definitionsbereichs

Bp: $\quad z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \qquad D = \mathbb{R}_+^2$

Neb. $\quad g(x,y) = 2 - 2x - y = 0 \Rightarrow y = -2x+2$



$y = -2x+2 \quad *$

$g(x,y) = 2-2x-y = 0$ $\qquad$ Gerade in der x,y-Ebene

Substitution:

$$z = -x^2 - \frac{1}{2}(-2x+2)^2 + 4$$

$$z = -3x^2 + 4x + 2$$

$$z' = -6x + 4 \qquad z' = 0 \Leftrightarrow -6x+4=0$$

$$z'' = -6 \qquad \Leftrightarrow 6x = 4$$

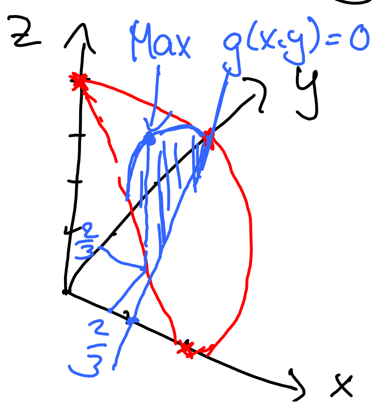
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

mit $*$ $\quad y = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$

$$z = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4$$

$$= -\frac{4}{9} - \frac{4}{18} + 4 = \frac{10}{3}$$

Max bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$



Nun: Methode von Lagrange

Lagrange (1736–1813)

Zunächst Methode für 2 unabh. Variablen
und eine Nebenbedingung

Geg. $z = f(x,y)$
$g(x,y) = 0$ Nebenbedingung

Die Extremwerte der Fkt. $z = f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ liegen an den Stellen, an denen die Funktion

$$L(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda}) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

3 Variablen

ihre Extremwerte annimmt

Die Lagrangefunktion hat hier nun 3 Variablen

Extremwertberechnung:

notwendig: $L_x = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0$

$$L_y = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0$$

$$L_\lambda = g(x,y) = 0$$

Die Lagrangefunktion nach λ abgeleitet ergibt die Nebenbedingung

Diese Gleichungen müssen nun gelöst werden

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_+^2$

$$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda \cdot (2 - 2x - y)$$

notwendige Bedingungen:

$$L_x(x,y,\lambda) = -2x - 2\lambda = 0 \quad \underline{I}$$

$$L_y(x,y,\lambda) = -y - \lambda = 0 \quad \underline{II}$$

$$L_\lambda(x,y,\lambda) = 2 - 2x - y = 0 \quad \underline{III}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Aus I}: \quad 2x = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -x \\ &\text{Aus } \underline{II}: \quad \lambda = -y \end{aligned}\right\} x = y \; *$$

$*$ in $\underline{III}$: $2 - 2x - x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

mit $*$ $\quad y = \frac{2}{3}$

Kandidaten für Extremwert unter der obigen NB bei $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Bp: Dosenproblem mit Hilfe der Lagrangemethode

Oben offene Dosen mit Radius r und Höhe h

Minimale Oberfläche bei Volumen 1 Liter

"oben offen"

$$f(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h$$

$$g(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h - 1000 = 0$$

$$L(r,h,\lambda) = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h + \lambda(\pi \cdot r^2 h - 1000)$$

$$L_r = 2\pi r + 2\pi h + 2\lambda\pi r h = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$L_h = 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \quad \mathrm{II}$$

$$L_\lambda = \pi r^2 h - 1000 = 0 \quad \mathrm{III}$$

Aus II : $2\pi r = -\lambda \pi r^2$

$$\Leftrightarrow -\lambda = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{r} \quad *$$

Aus I : $2\pi r + h(2\pi + 2\lambda\pi r) = 0$

mit $*$: $2\pi r + h(2\pi + 2 \cdot -\frac{2}{r} \cdot \pi \cdot r) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\pi r + h(2\pi - 4\pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r - 2\pi h = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r = 2\pi h \Leftrightarrow r = h \quad **$$

Aus III : $\pi \cdot r^2 \cdot r - 1000 = 0$

mit $**$ $\quad \Leftrightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi}$

$$\Leftrightarrow r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$