

Mathematik Vorlesung 8.6.2016

Wdh: Lagrange-Methode

$$z = \underbrace{f(x,y)}_{\text{2 unabh. Var.}} \quad g(x,y) = 0$$

Nebenbedingung in impliziter Form
schränkt den Def. ber. ein

$$\underbrace{L(x,y,\lambda)}_{\text{hier nun 3 unabh. Variablen}} = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

hier nun 3 unabh. Variablen

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabh. Variablen
und k Nebenbedingungen

$$z = f(x_1, \dots, x_n) \quad \text{Fkt. m. } n \text{ unabh. Variablen} \quad \text{Zielfunktion}$$

$$z_j = g_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad k \text{ Nebenbedingungen, implizit } j=1, \dots, k$$

$$\text{Es sei } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\underbrace{L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}_{n+k \text{ unabh. Variablen}} = L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_k g_k$$

$$= f(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(x)$$

Für diese Lagrangefunktion müssen nun Minima und Maxima, falls vorhanden, berechnet werden

Notwendige Bedingungen:

$$L_{x_i} = 0 \quad \text{für } i=1, \dots, n$$

$$L_{\lambda_j} = 0 \quad \text{für } j=1, \dots, k$$

Nicht notwendig lineares GS mit $n+k$ Unbekannten, von denen zunächst $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ als Kandidaten berechnet werden sollten. Die Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ müssen zunächst nicht bestimmt werden.

$$L_{x_i}(x, \lambda) = f_{x_i}(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_{j x_i}(x) = 0 \quad i=1, \dots, n$$

$$L_{\lambda_j}(x, \lambda) = g_j(x) = 0 \quad j=1, \dots, k$$

Hinreichende Bedingungen für eine Fkt. mit n unabh. Variablen und einer Nebenbedingung

Sei $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ Kandidat

Wir setzen voraus, dass $L(x, \lambda)$ die partiellen Abl. ein λ für die eine NB

Erster und zweiter Ordnung hängt!

Man berechne $G_n = \begin{vmatrix} L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} & \dots & L_{x_1 x_n} & \overset{= L_{\lambda x_1}}{g_{x_1}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ L_{x_n x_1} & L_{x_n x_2} & \dots & L_{x_n x_n} & \overset{= L_{\lambda x_n}}{g_{x_n}} \\ g_{x_1} & \dots & \dots & g_{x_n} & \overset{= L_{\lambda \lambda}}{0} \end{vmatrix}$

Hinreichende Bed:

$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ ist lokales Maximum, falls

$$G_2 > 0, G_3 < 0, \dots, G_n \begin{cases} > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

x^* ist lokales Minimum, falls

$$G_2 < 0, G_3 < 0, \dots, G_n < 0$$

Bp: $f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^3$

$$z = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3a)$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \text{I: } L_{x_1} &= \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda = 0 \\
 \text{II: } L_{x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + \lambda = 0 \\
 \text{III: } L_{x_3} &= \frac{1}{2\sqrt{x_3}} + \lambda = 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \neq 0 \\
 & \text{IV: } L_{\lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 3a = 0 \quad \neq \text{ in IV: } x_1 + x_1 + x_1 - 3a = 0 \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow 3x_1 = 3a \\
 & \quad \quad \quad \Leftrightarrow x_1 = a
 \end{aligned}$$

Kandidat: (a, a, a)

Um welche Art von Extremwert handelt es sich hier?

$$L_{x_1 x_1} = -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} \quad L_{x_1 x_2} = 0 \quad L_{x_1 x_3} = 0 \quad \text{NR: } L_{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda = \frac{1}{2} \cdot x_1^{-\frac{1}{2}} + \lambda$$

$$L_{x_2 x_1} = 0 \quad L_{x_2 x_2} = -\frac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{2}} \quad L_{x_2 x_3} = 0 \quad L_{x_1 x_1} = -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}}$$

$$L_{x_3 x_1} = 0 \quad L_{x_3 x_2} = 0 \quad L_{x_3 x_3} = -\frac{1}{4} x_3^{-\frac{3}{2}}$$

$$g_{x_1} = 1$$

$$g_{x_2} = 1$$

$$g_{x_3} = 1$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$G_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} x_3^{-\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Entwickeln nach der 1. Reihe}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Sarrus} \\
 \downarrow \\
 G_2 = \begin{array}{ccccc}
 & + & - & + & - \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 & -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 \\
 0 & -\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} & 1 & 0 & -\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \downarrow \quad
 \begin{array}{c}
 -\frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x_3^{-\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{16}x_2^{-\frac{3}{2}}x_3^{-\frac{3}{2}} \\
 \hline
 = \frac{1}{4}x_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}x_1^{-\frac{3}{2}}
 \end{array}$$

$$G_2(a, a, a) > 0 \quad G_3(a, a, a) < 0$$

lokales Maximum an der Stelle (a, a, a)

Einigungsaufgabe: Funktion mit 3 unabh. Veränder.
und 2 Nebenbed.

Lösung:

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

$$\text{I: } L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{II: } L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{III: } L_z = 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{IV: } L_{\lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\text{V: } L_{\lambda_2} = x + y + z = 0$$

$$\text{Aus I und II : } -\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 x\right) = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\lambda_1 y\right)$$

$$\text{folgt: } x=y \quad \text{oder} \quad \lambda_2=0$$

in V:

$$2x+z=0$$

$$z=-2x$$

* in IV

$$x^2+x^2+4x^2=1$$

$$6x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{6}$$

$$x_{1,2}=\pm\frac{1}{6}\sqrt{6}$$

$$\text{da } x=y \text{ und } z=-2x$$

aus III: $2\lambda_1 z=0$

$$\lambda_1=0$$

aus I u. II

$$x=y=0$$

mit V: $z=0$

das ist ein

Widerspruch

zu IV

$\lambda_1=0$ tritt nicht ein!

$$z=0$$

↓ aus V

$$x=-y$$

↓ aus IV

$$x^2+x^2=1$$

$$\Rightarrow 2x^2=1$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y_{3,4}=\mp\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$P_1: 1. \text{ Kandidat: } +\frac{1}{6}\sqrt{6}, +\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$P_2: 2. \text{ Kandidat: } -\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$P_3: 3. \text{ Kandidat: } \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0$$

$$P_4: 4. \text{ Kandidat: } -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0$$

kleinster
Abstand

$$f(P_1) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$f(P_2) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$f(P_3) = 1$$

$$f(P_4) = 1$$

größter Abstand

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

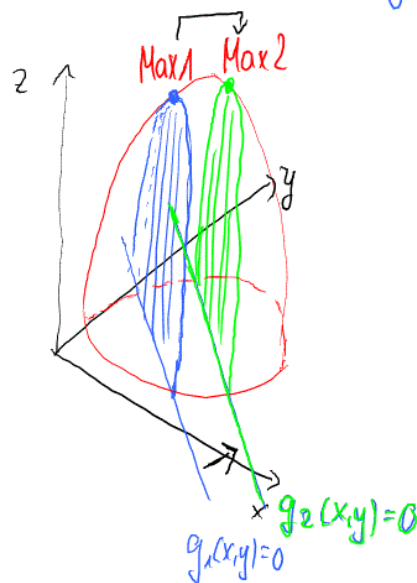
$$\frac{L(x, y, \lambda) - f(x, y)}{g(x, y)} = \lambda$$

λ : Differenzialquotient der Fkt. L
nach der Nebenb. g

$$\lambda = \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial g}$$

infinitesimale Änderungsrate
der Fkt. L bei Variation der
Nebenbed. g

Anschaulich:



Der Wert λ gibt an, um wieviel sich der Zielfunktionswert ändert,
wenn das Absolutglied der Nebenbedingung um eine Einheit verschoben wird!