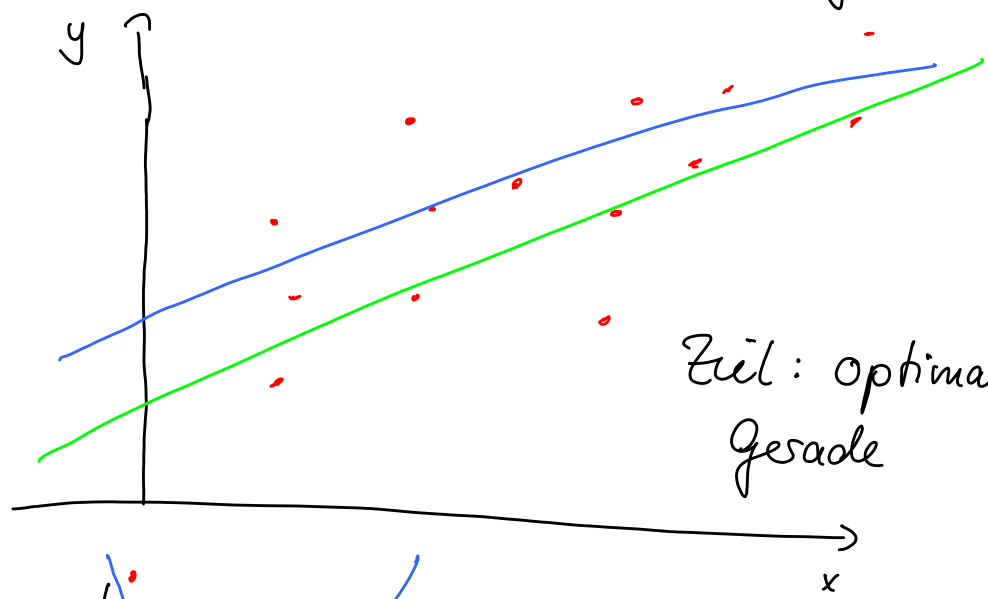
Vorlesung Mathematik 13.6.2016

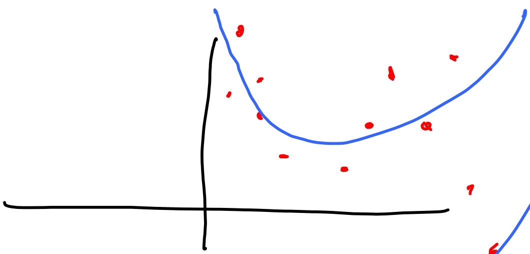
Anwendung: Ausgleichsrechnung

Bp



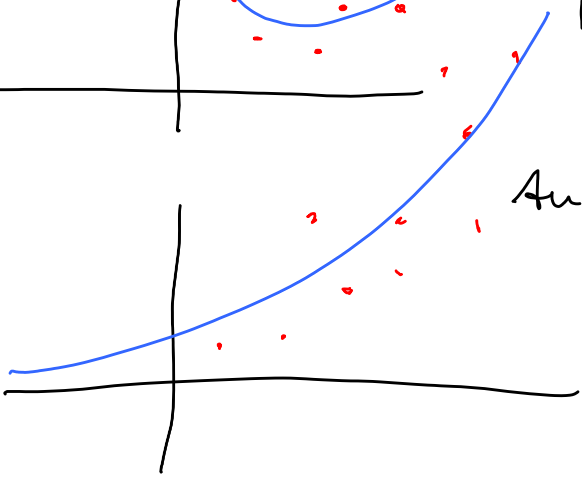
Ziel: optimale Gerade

aber auch



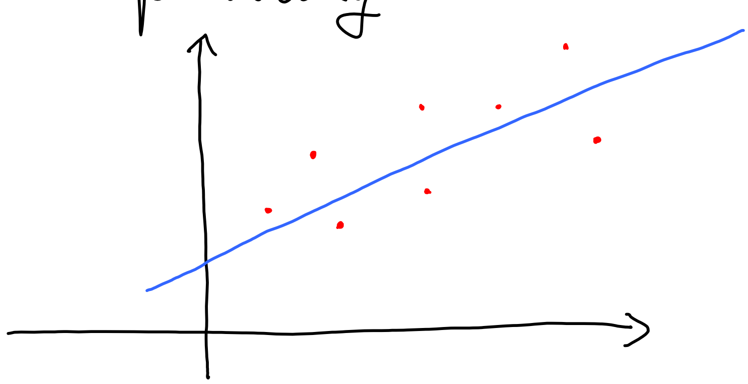
Anpassung durch ganzrationale Funktion

oder



Anpassung durch eine Exponentialfunktion

Lineare Anpassung

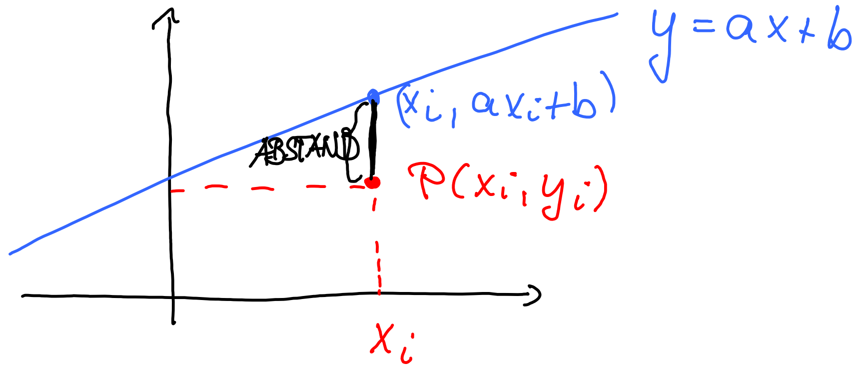


$y = \boxed{a}x + \boxed{b}$

2 Größen, die zu bestimmen sind!

$\rightarrow$ 2 Variablen

Methode der kleinsten Quadrate



Abstand $(y_i - (ax_i + b)$ hier: negativ

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

für $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
n Messwerte

Q ist eine Funktion mit den beiden unabh. Variablen a und b

Für Q muss nun ein Minimum bestimmt werden!

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^2 - 2(ax_i + b) y_i + (ax_i + b)^2 \right)$$

notwendige Bedingungen:

$$Q_a(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2x_i y_i + 2(ax_i + b) x_i$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} -x_i y_i + a x_i^2 + b x_i = 0 \quad \mathrm{I}$$

$$Q_b(a,b) = \sum_{i=1}^{n} -2y_i + 2(a x_i + b)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} -y_i + a x_i + b = 0 \quad \mathrm{II}$$

$$\text{Aus I}: \quad -\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} a x_i^2 + b x_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \mathrm{I}'$$

$$\text{Aus II}: \quad \sum_{i=1}^{n} -y_i + a x_i + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} a x_i + b$$

Normalengleichungen

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot b} \quad *$$

$$\bar{x} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{} \qquad \bar{y} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}_{} \quad *$$

arithmetische Mittel der x_i-Werte   arithmetische Mittel der y_i-Werte

$*$ in $*$: (Division durch n)
$$\frac{1}{n}\sum y_i = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + b$$

$$\bar{y} = a\cdot\bar{x} + b$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad **$$

$**$ in I':
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y}-a\bar{x})\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i = a\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$\boxed{a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\cdot\bar{y}\cdot\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{x}}}$$

Man kann nun a und b aus den Messwerten bestimmen!
Zu zeigen wäre nun, dass es sich auch tatsächlich

um ein Minimum handelt.

Zu zeigen wäre also : $Q_{aa}(a,b) > 0$

$Q_{bb}(a,b)$ berechnen

$Q_{ab}(a,b) = Q_{ba}(a,b)$ berechnen

$\Delta = Q_{aa} \cdot Q_{bb} - Q_{ab}^2 > 0$ (zu zeigen)

Es gilt tatsächlich $\Delta > 0$

$Q_{aa} > 0$

daher Minimum

Vorgehen am Beispiel

x	48	56	69	64	60	42	40	54	65	72	83	51
y	74	86	96	90	93	68	58	75	103	110	106	80

$$\bar{x} = \frac{704}{12} = 58.\overline{66}$$

$$\bar{y} = \frac{1039}{12} = 86.583$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 63051 \qquad n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 12 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$= 60953.7$$

$$\sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 43076 \qquad 12\,\bar{x}^2 = 41300.39$$

$$a = \frac{63051 - 60953.7}{43076 - 41300.39} = 1.181$$

$$b = 86.583 - 1.181 \cdot 58.\overline{66} = 17.298$$

$$y = 1.181\,x + 17.298$$

Anpassung mit Hilfe von Ausgleichskurven

Lösungsansätze für Kurven:

linear Fkt: $y = ax + b$

quadratische Fkt: $y = ax^2 + bx + c$

hier: $Q(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]^2$

Potenzfunktion: $y = ax^b$

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - a x_i^b\right]^2$$

Exponentialfunktion: $y = a \cdot e^{bx}$

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - a \cdot e^{b x_i}\right]^2$$

Graphentheorie

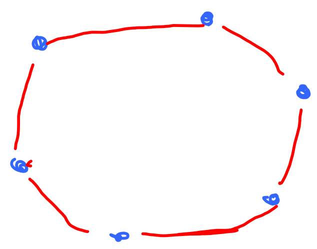
Bp: n Personen sind eingeladen

sollen an einem runden Tisch sitzen

Gesucht ist eine Sitzordnung, so dass

keine "Kontrahenten" direkt nebeneinander sitzen

Lösung Graphentheorie



Hamilton'sche Linie

2. klassische Problem: L. Euler

Euler'sche Brückenproblem : Euler'sche Linie
Eulerweg

Grundbegriffe

Def: Graph

$$G = (M, K, V)$$

$M = \{x_1, \dots, x_n\}$ Menge der Knoten

$K = \{k_1, \dots, k_m\}$ Menge der Kanten

$V : K \to M \; : \; k_i \longmapsto (x_i, x_j)$ geordnet

bzw. $\{x_i, x_j\}$ ungeordnet

Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen adjazent oder benachbart

Die Kante, die zwei benachbarte Knoten verbindet, heißt inzident

Bp: $G = (M, K, V)$

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

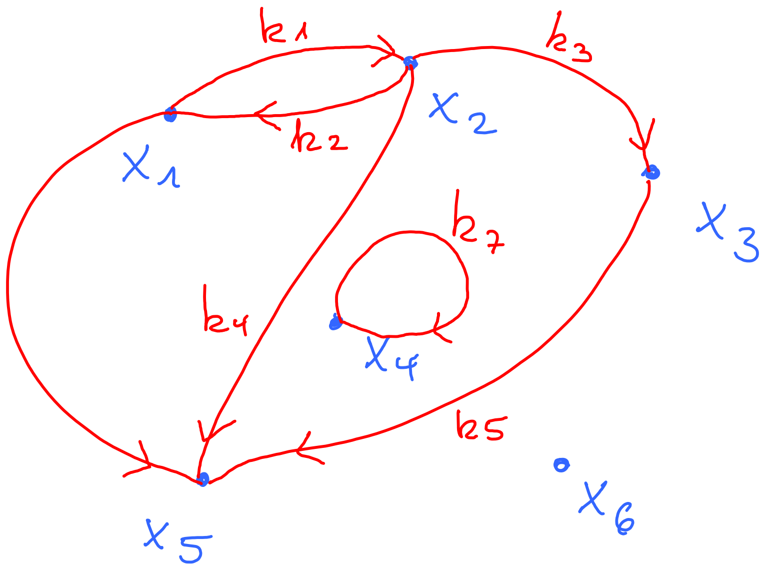
$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$

$V(k_1) = (x_1, x_2) \quad V(k_2) = (x_2, x_1)$

$V(k_3) = (x_2, x_3) \quad V(k_4) = (x_2, x_5)$

$V(k_5) = (x_3, x_5) \quad V(k_6) = (x_1, x_5)$

$V(k_7) = (x_4, x_4)$



k_7: Schlinge

x_6: isolierter Knoten

gerichteter Graph: Digraph