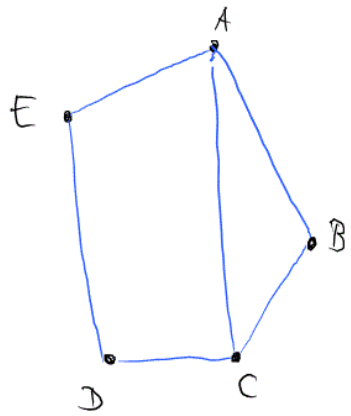
Mathematik Vorlesung 15.6.2016

Graphentheorie

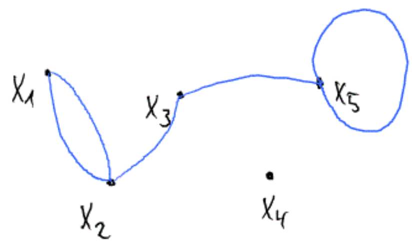


A,B,C,D,E Städte Knoten

Straßenverbindungen Kanten

Graph $G=(M,K,v)$

Bp:



ungerichteter Graph

Schleife (Schlinge) bei x_5

Doppelkante zwischen x_1 und x_2

isolierter Knoten bei x_4

Def: G heißt schlicht $\Leftrightarrow$ G besitzt keine Schlingen und keine Mehrfachkanten

Def: Knotengrad

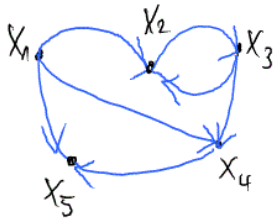
$\gamma(x_i)$: Anzahl der Kanten, die mit x_i inzidieren im Falle eines ungerichteten Graphen

Schlingen (Schleifen) zählen doppelt

$\underline{\gamma}(G)$: Minimalgrad : kleinste Knotengrad von G

$\overline{\gamma}(G)$: Maximalgrad : größte " " G

Def: Gerichteter Graph (Digraph)



Kanten können nur in einer Richtung durchlaufen werden

Knotengrad hier : Ausgangsgrad γ^+

Eingangsgrad γ^-

$\gamma^+(x_1) = 3 \quad \gamma^-(x_1) = 0$

$\gamma^+(x_2) = 1 \quad \gamma^-(x_2) = 2$

$\gamma^+(x_3) = 2 \quad \gamma^-(x_3) = 1$

$\gamma^+(x_4) = 1 \quad \gamma^-(x_4) = 2$

$\gamma^+(x_5) = 1 \quad \gamma^-(x_5) = 1$

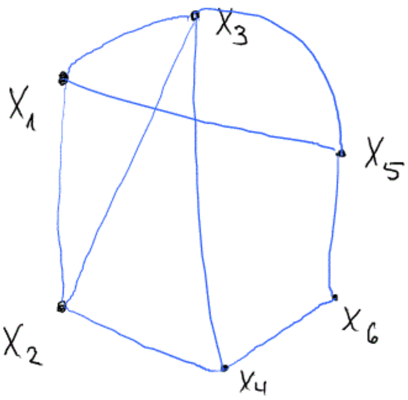
Def: Zusammenhängender Graph

Ein ungerichteter Graph (gewöhnlicher) heißt zusammenhängend

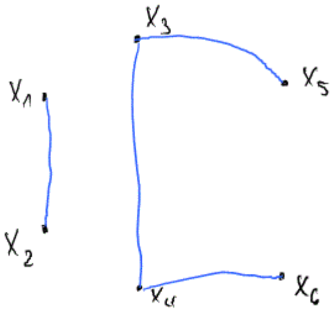
$\Leftrightarrow$ zu je zwei Knoten x_i, x_k gibt es stets eine Kantenfolge (Weg) von

x_i nach x_k

Bp:



Zusammenhängend



nicht zusammenhängend

besitzt zwei Zusammenhangskomponenten

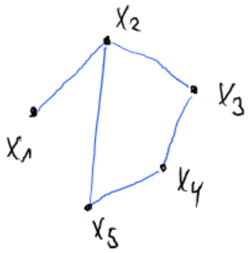
[cf. Äquivalenzklassen]

Zusammenhängende Teilgraphen

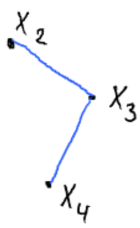
Def: Untergraph

entsteht durch Entfernung von Knoten, sowie aller mit diesen Knoten inzidierenden Kanten

Bp:

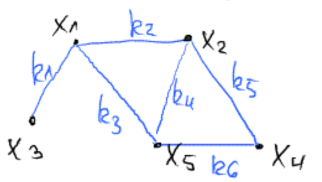


Weglassen von x_1 und x_5 führt auf:

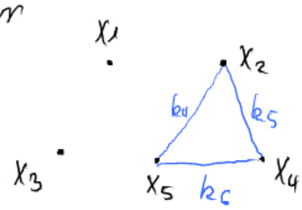


Def: Teilgraph

hier werden nur Kanten weggelassen



Weggelassen werden k_1, k_2, k_3



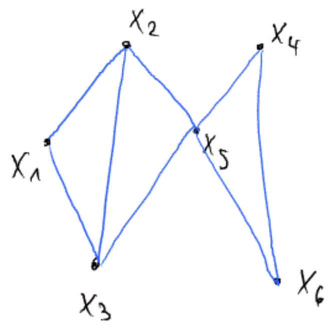
Def: trennende Knoten, Artikulationspunkte

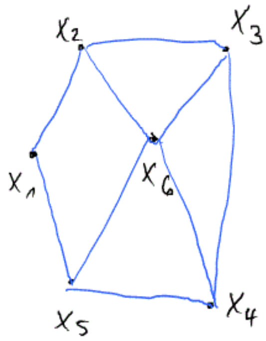
Knoten x_i heißt trennend, wenn nach Herausnahme von x_i und allen mit x_i inzidierenden Kanten der Restgraph mehr Zusammenhangskomponenten besitzt als der ursprüngliche Graph.

Def: Brücke

Eine Kante heißt Brücke, wenn nach Herausnahme dieser Kante der Zusammenhang nicht mehr gegeben ist

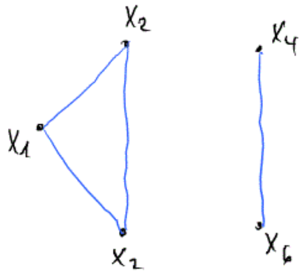
Bp:





Artikulationspunkt: x_5

Artikulationspunkt: keiner



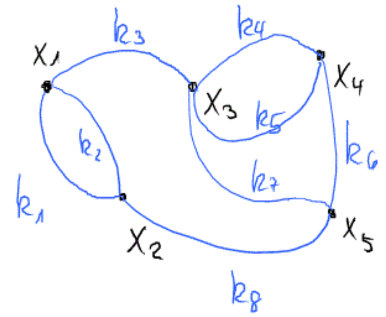
Def: (Kantenfolge, Weg)

Geg G, Ein Teilgraph G^* mit der Eigenschaft $V(x_i) = (x_{i-1}, x_i)$
$i = 1, \ldots, m$

heißt Kantenfolge

Ist $x_0 = x_m$, so heißt die Kantenfolge geschlossen (= Kreis Zyklus)

Bsp



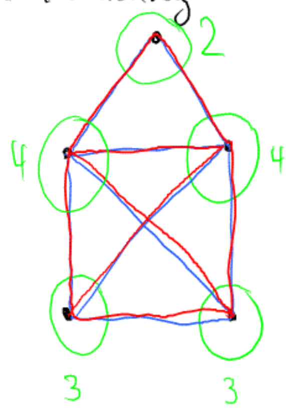
$k_8\ k_7\ k_5\ k_4\ k_5\ k_6$

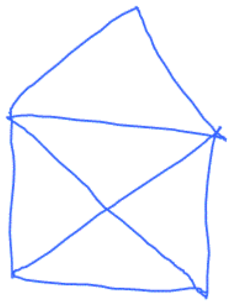
eine beliebige Kantenfolge

Def: Kantenzug

In einer Kantenfolge kommt keine Kante zweimal vor

Suche nach einem Kantenzug

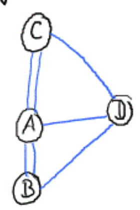




Def: Eulerzug : Jede Kante des Graphen wird genau einmal durchlaufen (Brückenproblem!)

Es gilt: Ein Eulerzug existiert nur, wenn der Grad von höchstens zwei Knoten ungerade ist

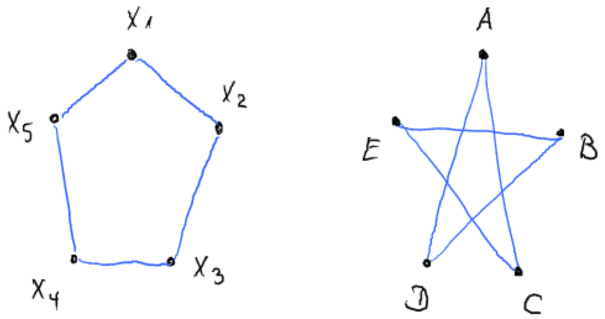
Brückenproblem:



Gibt es einen Eulerzug?
Nein, denn alle Knotengrade sind ungerade

Isomorphe Graphen

Quelle: Skript Konen



Ja:

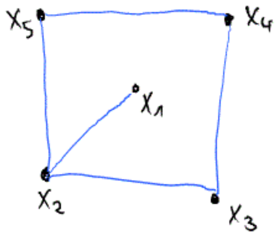
x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi(x)$	A	C	E	B	D

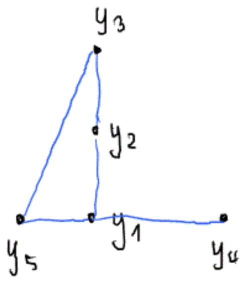
K	$[x_1,x_2]$	$[x_2,x_3]$	$[x_3,x_4]$	$[x_4,x_5]$	$[x_5,x_1]$
K'	$[A,C]$	$[C,E]$	$[E,B]$	$[B,D]$	$[D,A]$

Isomorphismus

bijektive Abbildung

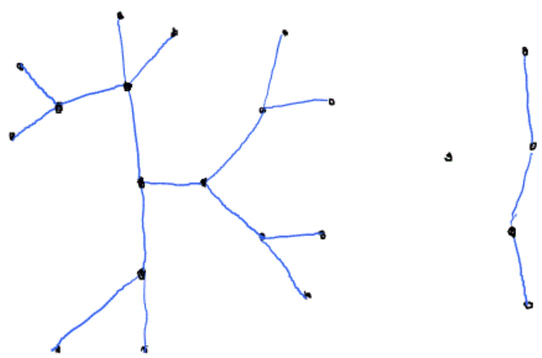
Bp:





x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\varphi(x)$	y_4	y_1	y_5	y_3	y_2

Bäume und Wälder



BAUM

WALD

Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph ohne geschlossene Kantenfolge

In einem Baum ist jeder Knoten x_i mit $\delta(x_i) > 1$ ein Artikulationspunkt (trennender Knoten)

Knoten mit Knotengrad 1 heißen Blätter!