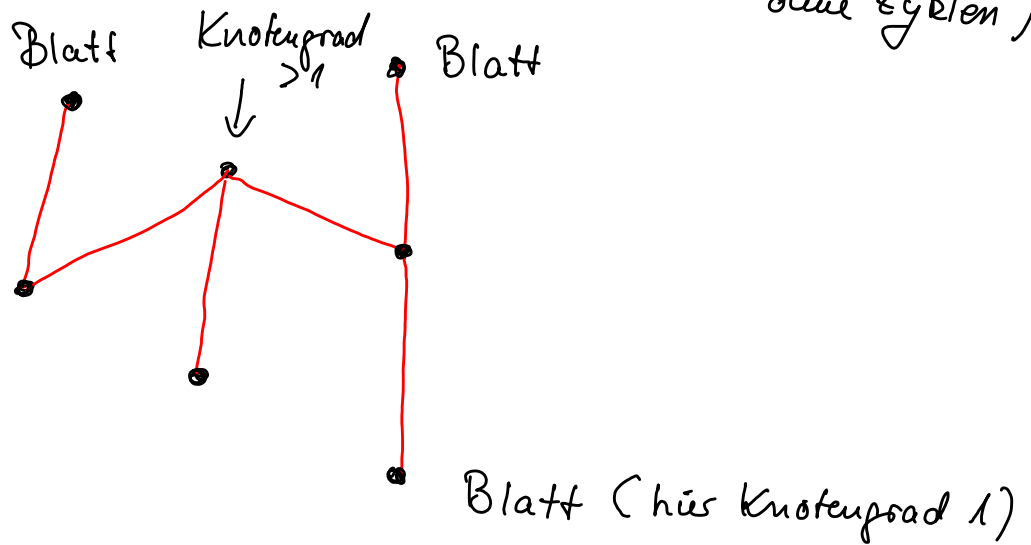


Vorlesung Mathematik

20.6.2016

Baum: Zusammenhängender Graph
ohne geschlossene Kantenfolge (ohne Kreise,
ohne Zyklen)



Knoten x_i mit $\varphi(x_i) > 1$ sind trennende Knoten

Satz: Ein Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten

Beweis: vollständige Induktion

Ind. anfang: $n=2$ ✓

Ind. vor.: Beh. gilt für ein $n=k$

Ind. schritt: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$

Aussage gilt für $n=k$

Baum mit $k+1$ Knoten besteht aus dem

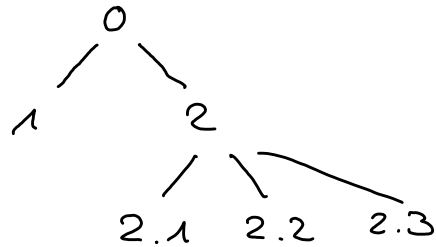
Baum mit k Knoten (oder $k-1$ Kanten (ad))

Kommt 1 Knoten dazu, dann kommt

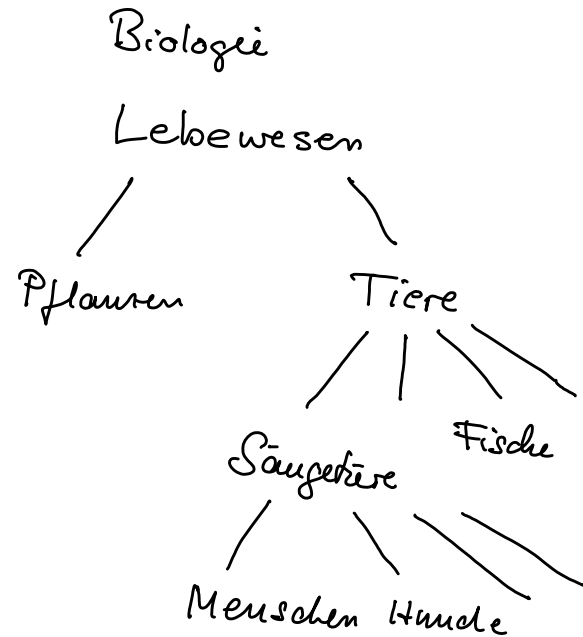
zu den $k-1$ Kanten 1 Kante dazu, d.h.
man hat $k-1+1 = k$ Kanten!

(Ind. schluss: Die Beh. gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.)

Wo findet man Bäume?



Datenstrukturen
Verwalten, Sortieren

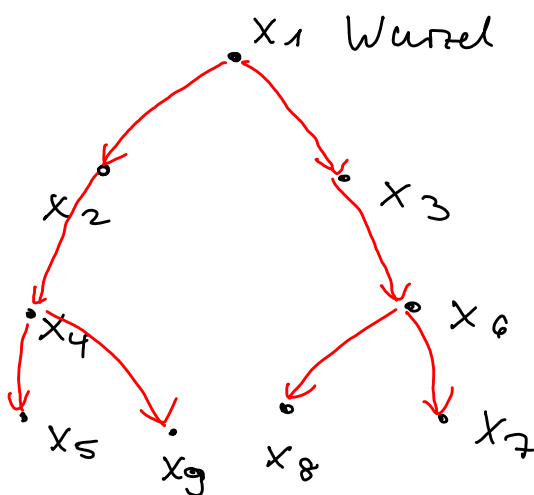


Def. (Wurzelbaum)

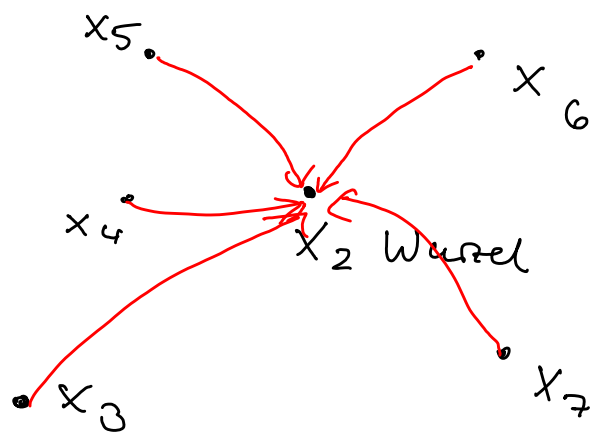
Ein Baum, dessen Kanten gerichtet sind

Ein Knoten ist die Wurzel

OUT-TREE



IN-TREE

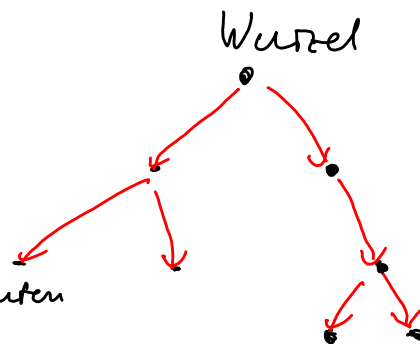


Def (Höhe eines Baumes)

größte Länge eines Weges

von der Wurzel zum Blatt

Anzahl der durchlaufenen Kanten

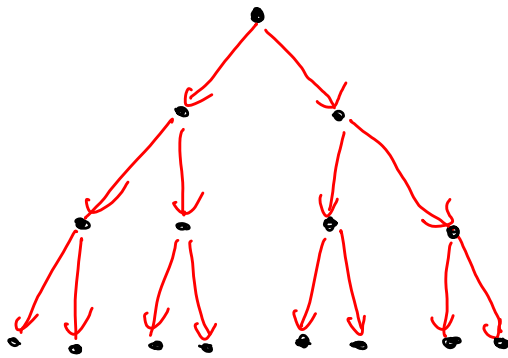


hier: 3

andere Def. : Anzahl der Knoten entlang des längsten
Weges : hier : 4

Def (Binärbaum)

Ein Wurzelbaum, bei dem jeder Knoten höchstens
zwei Nachfolger hat (Kindknoten)



Vollständiger Binärbaum

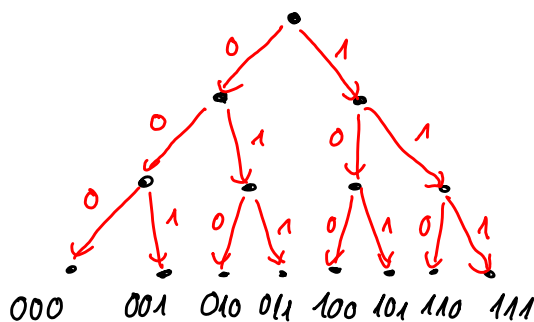
$$H = 4$$

Anzahl der Knoten in
einem vollst. Binärbaum

$$2^H - 1$$

$$\text{hier } 2^4 - 1 = 15$$

Bp : (Logik)



Wichtige Anwendung : Binäre Suchbaum
BST

Vor : Daten benötigen einen sortierbaren Schlüssel

Suche : Sei s der Schlüssel

Ist s gleich dem Schlüssel, so ist die
Suche beendet

$S < x$: Suche beginnt beim linken Kind

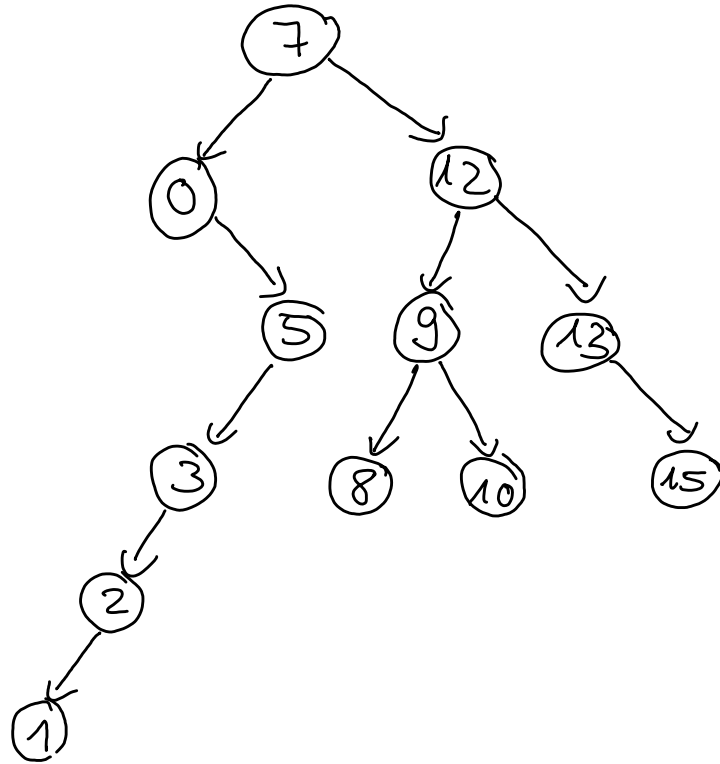
$S > x$: Suche beginnt beim rechten Kind

Bp : Suche nach Zahlen aus folgender "Datenmenge"

[7, 12, 0, 5, 9, 3, 8, 2, 13, 10, 15, 1]

$<$ links

$>$ rechts



Wichtige Anwendung der Binärbäume :

Huffman - Codierung

Präfix - Code

Kein Code darf Beginn eines anderen Codes sein

(Bp: Tel.nummern 112 darf nicht am Beginn anderer Tel.nr. stehen!)

Bp: Code 1: 0, 10, 11 **Präfix-Code**

Code 2: 0, 01, 10 **kein Präfix-Code**

Der Huffman-Code ist ein Präfix-Code

Die Codewörter sind unterschiedlich lang

Wurzelbaum zur Darstellung

Blätter: zu codierende Zeichen

Pfad von Wurzel zu Blatt heißt den Code

Aufbau für Buchstabenbeispiel

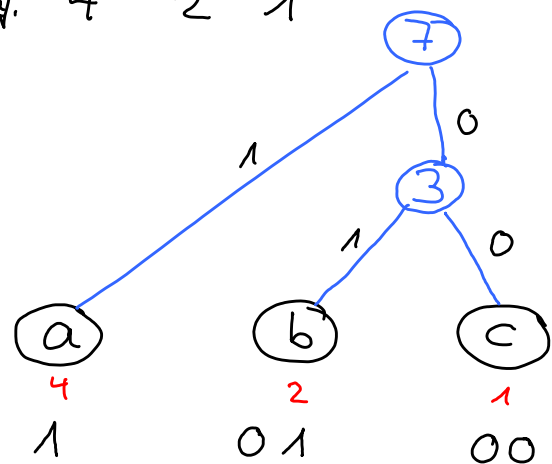
1) Häufigkeit ermitteln von Buchstaben (incl. Leerzeichen)

Jeder Buchstabe wird zum Blatt des Wurzelbaums

Bp: abacaba

a b c

rel. Häuf. 4 2 1



Code : 0111000110011
b a a c b a c a a

Bp: Huffman-Code für:

MISSISSIPPI_IST_MISSISSIPPI

M I S P _ T
2 9 9 4 2 1

T 1
_ 2] 3 T, _

M 2

P 4

I 9

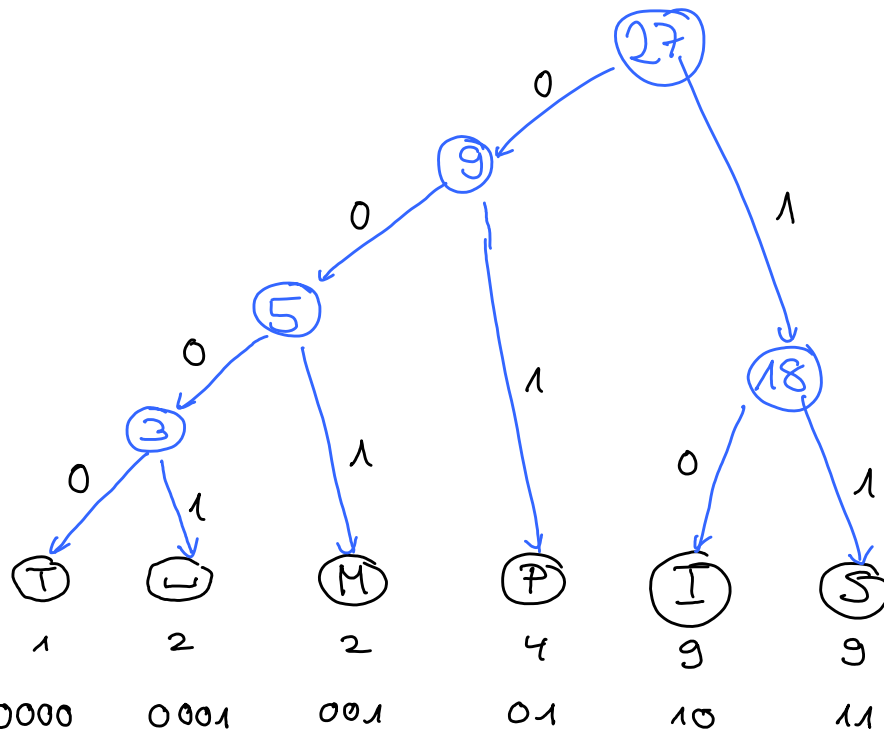
S 9

M	2
T, L	3
P	4
I	9
S	9

P	4
T, L, M	5
I	9
S	9

18

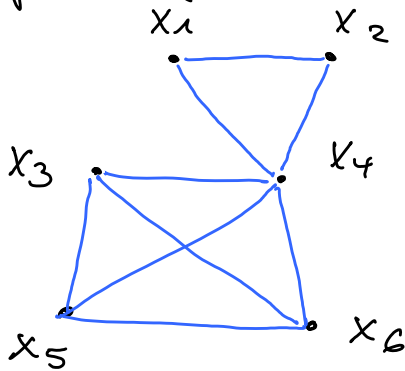
27



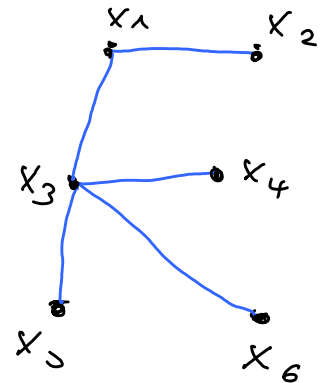
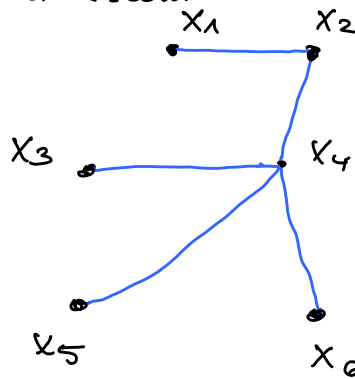
Code

0000 0001 001 01 10 11

Def: (Gerüst)



Zusammenhängender Teilgraph mit minimaler Kantenanzahl



Gerüste enthalten keine Kreise

Bewertete Graphen

Bp:

