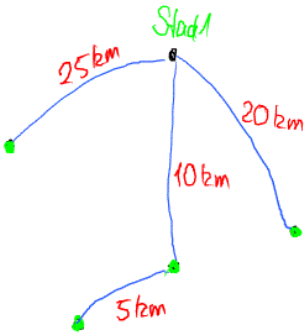
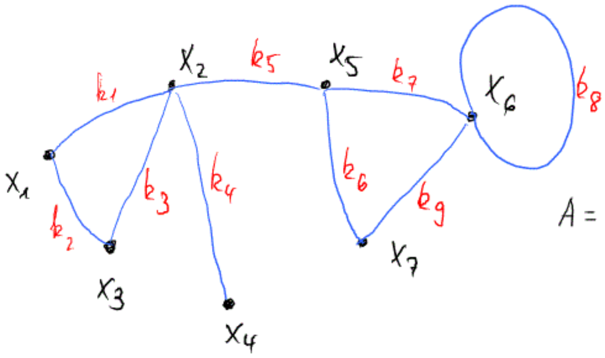
Vorlesung Mathematik
22.06.2016



Bewerteter Graph



$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Übertragung der Informationen eines Graphen in eine Matrix

Adjazenzmatrix

Geg: G ein ungerichteter Graph mit n Knoten

Die quadr. Matrix $A = (a_{ij}) \quad i,j = 1, \dots, n$

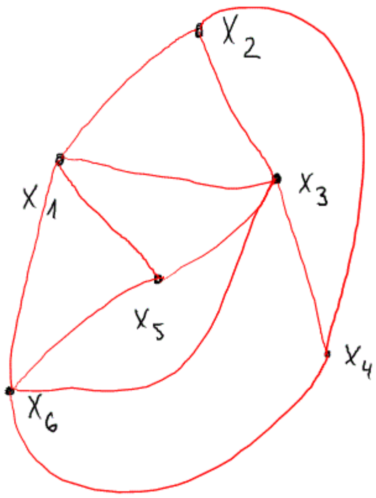
A $n \times n$-Matrix

$$\text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (x_i, x_j) \text{ Kante ist} \\ 0, & \text{sonst} \\ 2, & \text{falls bei } x_i \text{ Schlinge} \end{cases}$$

Bp: Gegeben ist folgende Adjazenzmatrix

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe:
Zeichnen Sie diesen Graphen möglichst kreuzungsfrei!



kreuzungsfrei gezeichnet

Weitere Informationen: 1) ungerichteter nicht schlichter Graph:

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} k_i, & \text{falls } i \neq j \text{ und } k_i \text{ Kanten zw. } x_i \text{ u } x_j \\ 2k_i, & \text{falls } k_i \text{ Schlingen und } x_i = x_j \end{cases}$$

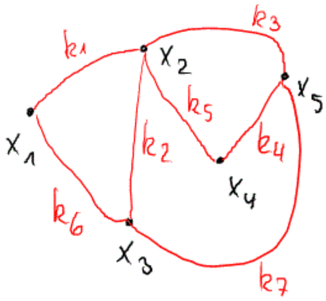
2) bewerteter Graph

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} \text{Bewertung von Kante } x_i, x_j \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Der Knotengrad kann aus der Adjazenzmatrix abgelesen werden:

Summe der "1" in einer Zeile bzw. Spalte

Falls Knoten und Kanten fest nummeriert sind, dann ex. eine weitere Matrixdarstellung:



Inzidenzmatrix

$$\begin{array}{c|ccccccc|} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

5×7

Anz. Knoten, Anz. Kanten

Wir betrachten:

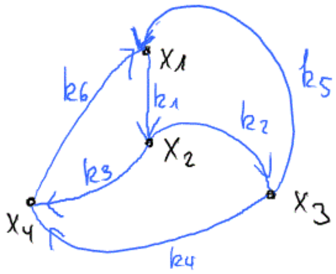
Schlichte Graphen

$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ wenn } k_j \text{ mit } x_i \text{ inz.} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$i = 1, \dots, n$
$j = 1, \dots, k$

Wie "übersetze" ich Informationen eines Digraphen in die Inzidenzmatrix?

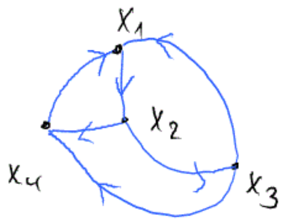
$$B = (b_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k_j \text{ von } x_i \text{ ausgeht} \\ -1, & \text{falls } k_j \text{ bei } x_i \text{ ankommt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c|cccccc|} & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ x_2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Bedeutung der Adjazenzmatrizen

Vorbem: Adjazenzmatrix von Digraphen



$$A = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Bem: In einem Digraphen gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma^{+}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \gamma^{-}(x_i) = k \quad k \text{ Kantenzahl}$$

In einem ungerichteten Graphen gilt: $\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) = 2k$

Erinnerung: Weg: Kantenfolge mit lauter verschiedenen Knoten

$$\underbrace{\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}}_{\substack{4 \times 4 \\ A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{4 \times 4 \\ A}} = \underbrace{\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}}_{\substack{4 \times 4 \\ A^2}}$$

1 Weg von x_1 nach x_3 der Länge 2

2 Wege von x_2 nach x_1 der Länge 2

Mit Hilfe von $A^r = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{r \text{ mal}}$ kann man Aussagen über die Anzahl von Wegen ("Pfeilfolgen") und die Existenz in Digraphen treffen!

$A^r = (a_{ij}^r)$ $\quad$ a_{ij}^r = Anzahl der Weg der Länge r von x_i nach x_j