

Vorlesung Mathematik

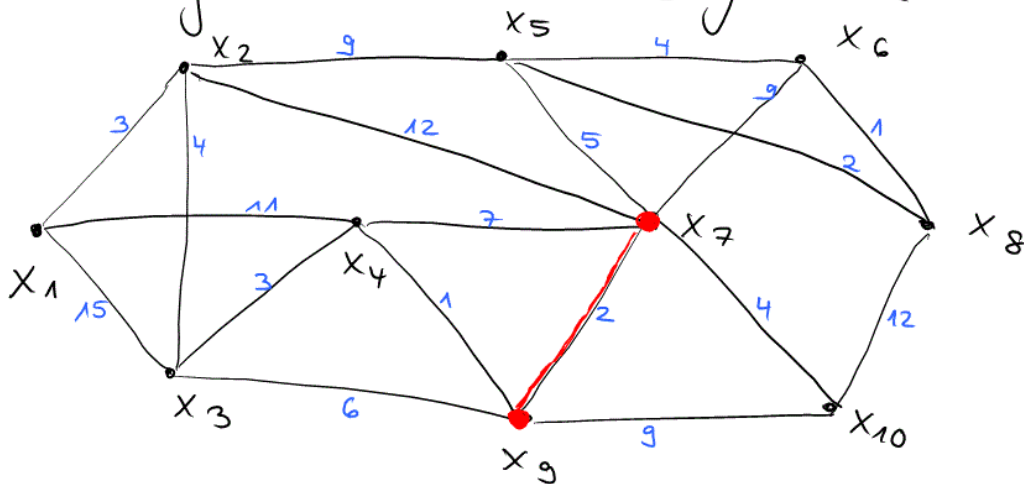
4.7.2016

Durchlaufen von Graphen

- * single source shortest paths
von einem Knoten zu allen anderen
- all pairs shortest paths
zwischen je zwei Knoten

Markierungsalgorithmen zur Bestimmung kürzester Wege *

Algorithmus von Dijkstra



Gesucht: die kürzesten Wege von x_7 zu allen anderen Knoten

Algorithmus von Dijkstra

1. Iteration $D(x_7) = 0$ $M_1 := \{x_7\}$

(1) Markiere Startknoten
Setze $i = 1$

(2) M^* Menge aller Knoten, die mit x_7 durch eine Kante verbunden sind

$$M^* = \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}\}$$

x_2	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}
12	7	5	9	2	4

$x_s \in M^*$

Setze $D(x_s) = d(x_7, x_s)$

$$D^*(x_s) = \min (D(x_r) + d(x_r, x_s))$$

hier: $D(x_9) = 2$

Markiere Kante (x_7, x_9)

$$M_2 := M_1 \cup \{x_9\} = \{x_7, x_9\}$$

Iteration 2

Bestimme nun die Knoten, die zu x_7 und x_9 benachbart sind

$$M^* = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{10}\}$$

Ermittlung der Entfernungen $D(x_s)$, $x_s \in M^*$

und zwar direkt oder über x_9 erreichbar

x_s	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	12	8	3	5	9	4
		2+6	(über x_9)			

$$D(x_4) = 3$$

Markiere die Kante (x_9, x_4)

Iteration 3

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_{10}\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_{10}
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	4

$$D(x_{10}) = 4$$

Markiere die Kante (x_7, x_{10})

$$M_4 = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}\} \text{ Menge der bisher markierten Knoten}$$

Iteration 4

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_8
$D^*(x_s)$	14	12	6	5	9	16

$$D(x_5) = 5$$

Markiere die Kante (x_7, x_5)

$$M_5 = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5\}$$

Iteration 5

$$M^* = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_3	x_6	x_8
$\mathbb{D}^*(x_s)$	14	12	6	9	7

$$\mathbb{D}(x_3) = 6$$

Markiere die Kante (x_4, x_3)

$$M_6 = \{x_7, x_9, x_4, x_{10}, x_5, x_3\}$$

Iteration 6

$$M^* = \{x_1, x_2, x_6, x_8\}$$

x_s	x_1	x_2	x_6	x_8
$\mathbb{D}^*(x_s)$	14	10	9	7

$$\mathbb{D}(x_8) = 7$$

Markiere die Kante (x_5, x_8)

$$M_7 = M_6 \cup \{x_8\}$$

Iteration 7

$$M^* = \{x_1, x_2, x_6\}$$

x_s	x_1	x_2	x_6
$\mathbb{D}^*(x_s)$	14	10	8

$$\mathbb{D}(x_6) = 8$$

Markiere (x_6, x_8)

$$M_8 = M_7 \cup \{x_6\}$$

Iteration 8

$$M^* = \{x_1, x_2\}$$

x_5	x_1	x_2
$\mathcal{D}^*(x_5)$	14	10

$$\mathcal{D}(x_2) = 10$$

Markiere (x_3, x_2)

$$M_9 = M_8 \cup \{x_2\}$$

Iteration 9

$$M^* = \{x_1\}$$

x_5	x_1
$\mathcal{D}^*(x_5)$	13

$$\mathcal{D}(x_1) = 13$$

Markiere (x_2, x_1)

Zusammenfassung

$\mathcal{D}(x_1) = 13$	(14. 9)
$\mathcal{D}(x_2) = 10$	(14. 8)
$\mathcal{D}(x_3) = 6$	(14. 5)
$\mathcal{D}(x_4) = 3$	(14. 2)
$\mathcal{D}(x_5) = 5$	(14. 4)
$\mathcal{D}(x_6) = 8$	(14. 7)
$\mathcal{D}(x_7) = 0$	
$\mathcal{D}(x_8) = 7$	(14. 6)

$$\textcircled{D} \quad (x_9) = 2 \quad (\text{H. 1})$$

$$\textcircled{D} \quad (x_{10}) = 4 \quad (\text{H. 3})$$

Ein paar Bemerkungen zum Maximalflußproblem
Modelle finden für Transportaufgaben

Notwendige Begriffe:

Quelle in einem gerichteten Graphen:

ist ein Knoten, von dem nur "Pfeile" ausgehen

Senke ist ein Knoten, wo nur Pfeile ankommen

Wichtig: Flußerhaltung

Ziel: Bestimmung der maximalen Menge, die
in einer "Senke" ankommen kann

Def: Netzwerk $N = (M, K, \underset{\uparrow}{s}, \underset{\uparrow}{t}, \underset{\uparrow}{c})$
Quelle Senke Kapazität

eine Art gerichteter, bewerteter Graph
mit zwei ausgezeichneten Knoten

Def: $s-t$ -Fluss

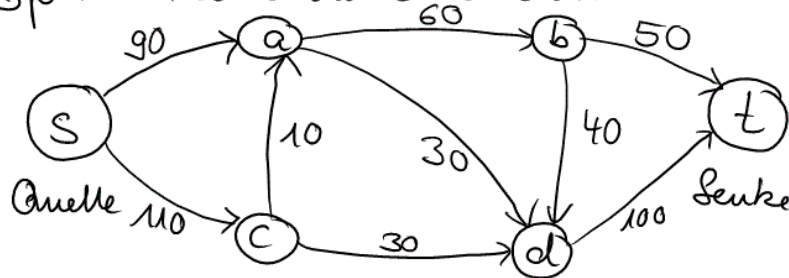
ist eine Belegung ^{der Kanten} mit $r \in \mathbb{R}^+$
mit folgenden Bed.

- 1) Keine Kante mit höherem Wert als ihre Kapazität

2) In jedem Knoten (ausser Quelle und Senke)
muss "Input" gleich "Output"

Def: Schnitt

Bp: Paketzustellendienst



Suche nach Maximalfluss von
S nach T