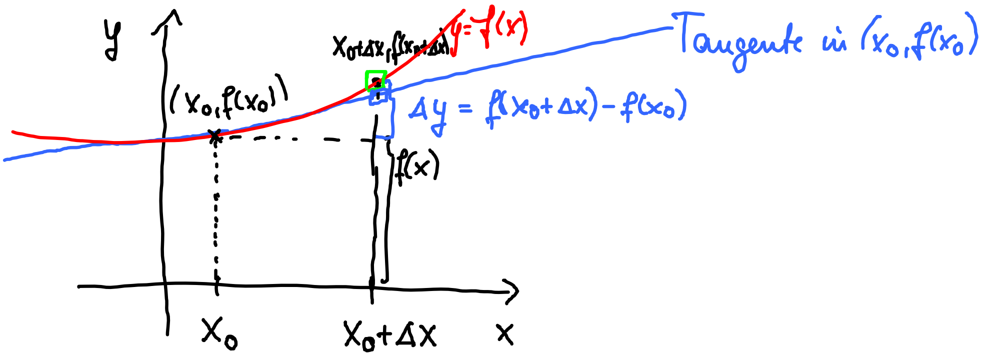
Vorlesung Mathematik 2
21. 6. 2017

Differential



Tangentengleichung: $\quad y = mx + b$

Im Punkt $(x_0, f(x_0))$ stimmen die Steigung von Kurve und Tangente überein!

$$\left.\begin{array}{l}\text{Steigung der Kurve: } y' = f'(x_0) \\ \text{Steigung der Tangente: } y' = m\end{array}\right\} \Rightarrow m = f'(x_0) \quad *$$

Im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gilt: $y_0 = m x_0 + b$

$$\Leftrightarrow b = y_0 - m x_0$$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} b = y_0 - f'(x_0)\cdot x_0$$

Tangentengleichung: $\quad y = f'(x_0)\cdot x + y_0 - f'(x_0)\cdot x_0$

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Bestimmung der Tangentialebenengleichung

$$z = ax + by + c$$

Es gilt: 1) Fläche und Tangentialebene haben im Berührpunkt dieselbe Steigung, d.h.

$$z_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$z_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$\left.\begin{array}{l} z_x = a = f_x(x_0, y_0) \\ z_y = b = f_y(x_0, y_0)\end{array}\right. \quad (*)$$

2) Berührpunkt erfüllt Gleichung der Funktion als auch

Gleichung der Tangentialebene

$$z_0 = a x_0 + b y_0 + c \quad \Rightarrow \quad c = z_0 - a x_0 - b y_0$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad c = z_0 - f_x(x_0,y_0)\cdot x_0 - f_y(x_0,y_0)\cdot y_0$$

damit gilt:

$$z = f_x(x_0,y_0)\cdot x + f_y(x_0,y_0)\cdot y + z_0 - f_x(x_0,y_0)x_0 - f_y(x_0,y_0)\cdot y_0$$

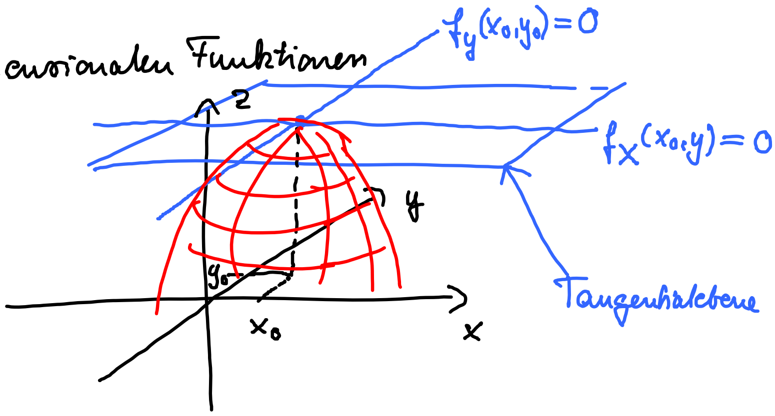
$$z = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + z_0$$

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Totale Differential $\quad df = f_x\, dx + f_y \cdot dy$

Extremwerte bei mehrdimensionalen Funktionen

Notwendige Bedingungen:
die partiellen Ableitungen
"verschwinden"



Hinreichende Bedingungen:
(erst partielle zweiter Ordnung berechnen!)

$$\Delta = f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$$

$$f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \quad \Rightarrow \text{Max}$$

$$f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \quad \Rightarrow \text{Min}$$

Falls $\Delta < 0 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt

$\Delta = 0 \quad \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich

auch als Determinante zu schreiben

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}\cdot f_{yx} = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^2$$

Aufgabe $f(x,y) = x^3 - 12xy + 6y^2$ Gesucht: Extremwerte und Sattelpunkt

Notw. $\text{I} \quad f_x = 3x^2 - 12y = 0$

$\text{II} \quad f_y = -12x + 12y = 0$

Aus II : $12x = 12y \iff x = y$ *

* in I : $3x^2 - 12x = 0 \iff 3x(x-4) = 0$

entweder $3x = 0 \iff x = 0$
oder $x - 4 = 0 \iff x = 4$

mit * ergeben sich folgende Kandidaten : $(0,0)$ bzw. $(4,4)$

$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = 12 \qquad f_{xy} = -12 \qquad \Delta = 6x \cdot 12 - (-12)^2 = 72x - 144$

$\Delta(0,0) = 6 \cdot 0 \cdot 12 - (-12)^2 = -144 \qquad \Delta(0,0) < 0$
$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0,0,0)$

$\Delta(4,4) = 288 - 144 = 144 > 0$

$f_{xx}(4,4) = 6 \cdot 4 = 24 > 0 \Rightarrow$ Min bei $(4,4,-32)$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremwerte bei Funktionen mit n unabhängigen Variablen

Geg: $z = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ Kandidat

notwendig : $\operatorname{grad} f(\bar{x}) = 0$

hinreichend : $\bar{x}$ lokales Maximum $\iff H_1 < 0,\ H_2 > 0,\ H_3 < 0, \ldots$

$H_n = \begin{cases} < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

$\bar{x}$ lokales Minimum $\iff H_1 > 0,\ H_2 > 0,\ H_3 > 0 \ldots$

Wobei H_i die i-te Hauptunterdeterminante von H, der Hesse-Matrix ist

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

$$H_i = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_i} \\ \vdots & & \\ f_{x_ix_1} & \cdots & f_{x_ix_i} \end{vmatrix}$$

Bp: $n=2$ notw. $f_{x_1}=0 \quad f_{x_2}=0$

$H_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}$ hinr. $H_1<0$, $H_2>0$

$H_1 = \left| f_{x_1x_1} \right|$

$f_{x_1x_1}<0 \quad f_{x_1x_1}\cdot f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2 > 0$ Max

$H_1>0 \quad f_{x_1x_1}\cdot f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2 > 0$ Min

$f_{x_1x_1}>0$

Aufgabe $z = f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1^3-3x_1} - x_2^2 + x_2\cdot x_3 - x_3^2 + 3x_3$

Kandidaten: I $f_{x_1} = (3x_1^2-3)\cdot e^{x_1^3-3x_1} = 0$

II $f_{x_2} = -2x_2 + x_3 = 0$

III $f_{x_3} = x_2 - 2x_3 + 3 = 0$

Aus I: $\underbrace{(3x_1^2-3)}\cdot \underbrace{e^{x_1^3-3x_1}}_{\neq 0} = 0$

$3x_1^2=3$

$x_1^2=1$

$x_{11}=1 \quad x_{12}=-1$

Aus II und III $2x_2 = x_3$

$x_2 - 2\cdot 2x_2 + 3 = 0$

$-3x_2 = -3$

$x_2 = 1$

$x_2=1$ in II: $-2+x_3 = 0$

$x_3 = 2$

2 Kandidaten $x_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zu Hause: H_1 H_2 H_3 für die Kandidaten berechnen und dann entscheiden!