

Letzte Vorlesung SS 2017

19.7.2017

Integrale $\int_a^b f(x) \cdot dx$ bestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

Folgerung: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Wichtig 2 Integrationsregeln

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Partielle Integration
Produktintegration

Bp: $\int 4t \cdot \cos(2t) dt$

$$= 4t \cdot \frac{1}{2} \sin(2t) - \int 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2t) dt$$
$$u = 4t \quad v' = \cos(2t) \quad = 2t \sin(2t) - \int 2 \cdot \sin(2t) dt$$
$$u' = 4 \quad v = \frac{1}{2} \sin(2t) \quad \underbrace{-2 \cdot \frac{1}{2} \cos(2t)}_{\text{hier auch schon int. d. Subst.}}$$
$$= 2t \sin(2t) + \cos(2t) + C, C \in \mathbb{R}$$

Integration durch Substitution
(herzuleiten aus der Kettenregel)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(z) dz \quad z = g(x)$$

Bp: $\int x^2 \cdot \sqrt{3x^3+7} dx$

$$z = 3x^3+7$$
$$z' = \frac{dz}{dx} = 9x^2$$
$$\Rightarrow dz = 9x^2 \cdot dx$$
$$dx = \frac{dz}{9x^2}$$

$$\int \underbrace{\sqrt{3x^3+7}}_z \cdot x^2 \underbrace{\frac{dx}{9x^2}}_{\frac{dz}{9}}$$

$$= \frac{1}{9} \int \sqrt{z} dz \quad F(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}}$$

$$F(x) = \frac{2}{27} \cdot \sqrt[3]{z^3} = \frac{2}{27} \cdot z \cdot \sqrt[3]{z}$$

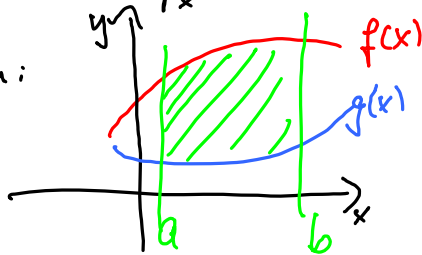
$$\hat{=} \frac{2}{27} \cdot (3x^3 + 7) (\sqrt[3]{3x^3 + 7}) + C$$

Rücksubst.

zu Hause:

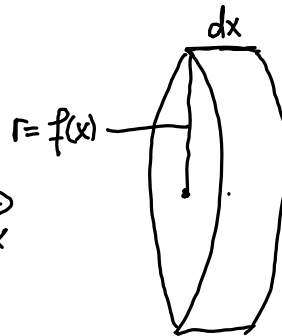
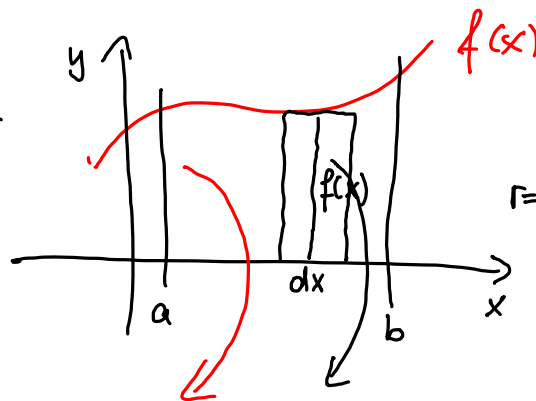
$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Anwendungen:

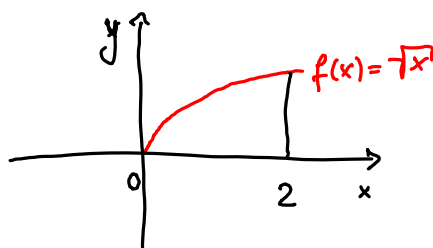


$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Rotationskörper



$$V_{Zyl} = \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$$

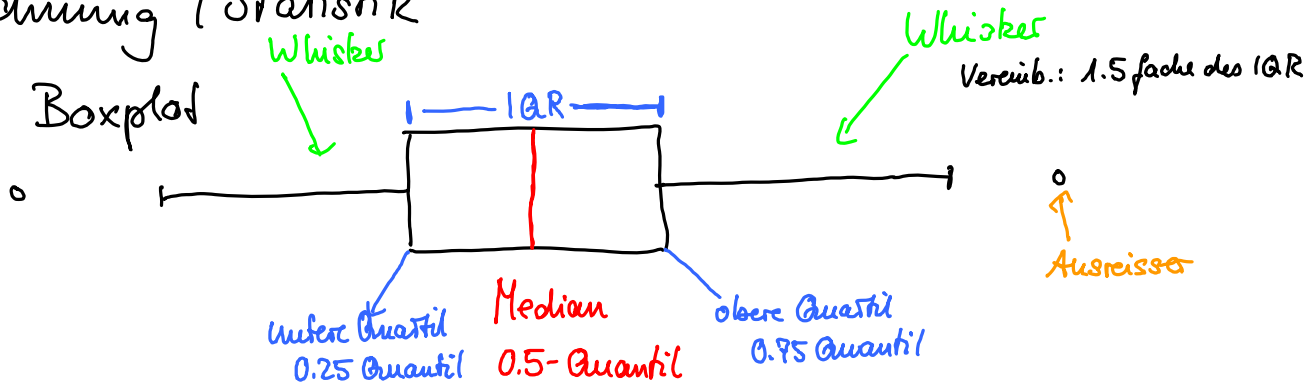


Rotationsvolumen: $V_{x\text{-Achse}} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$

$$\pi \int_0^2 [\sqrt{x}]^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \dots$$

W'rechnung (Statistik)

1) Boxplot



2) Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{Lotto : } \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot \underbrace{(49-6)!}_{43!}} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6!} = 13983816$$

$$P(6 \text{ Richtige}) = \frac{1}{13983816} = 7.15 \cdot 10^{-8}$$

$$P(\text{affäre}) = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{50} = 1.6 \cdot 10^{-7}$$

(auf einer Tastatur mit 50 Tasten)

3) Binomialverteilung

Aufgabe: Tippen einer Seite : 99% ohne Fehler

Frage: W, dass höchstens 3 Seiten in einem Buch mit 225 Seiten fehlerhaft sind

$$p = 0.01 \quad q = 0.99 \quad n = 225 \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \binom{225}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{225} + \binom{225}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{224} + \binom{225}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{223} + \binom{225}{3} \cdot 0.01^3 \cdot 0.99^{222} \\ &= \dots = 0.81017 \approx 81\% \end{aligned}$$

4) Bedingte Wahrscheinlichkeit

Aufgabe: Student S fährt 50% der SemesterTage mit dem Bus

In 70% dieser Fälle kommt er pünktlich an.

Durchschnittlich kommt er an 60% der Tage pünktlich an.

Heute ist er pünktlich. Mit welcher W hat er den Bus benutzt?

$$A: \text{fährt Bus} \quad p(A) = 0.5$$

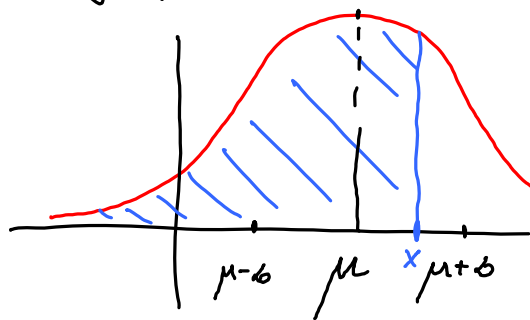
$$B: \text{ist pünktlich} \quad p(B) = 0.6$$

$$p(B|A) = 0.7$$

$$\text{Gesucht: } p(A|B) = \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6}$$

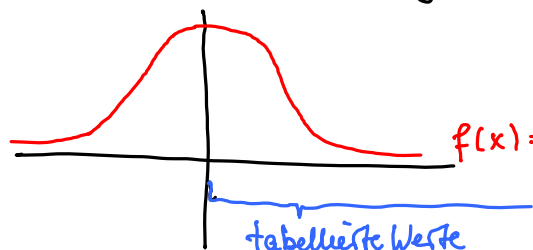
Bayes'sche Formel = 0.5833

Die Gauß'sche Normalverteilung



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Standardnormalverteilung $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $\mu=0$ $\sigma=1$



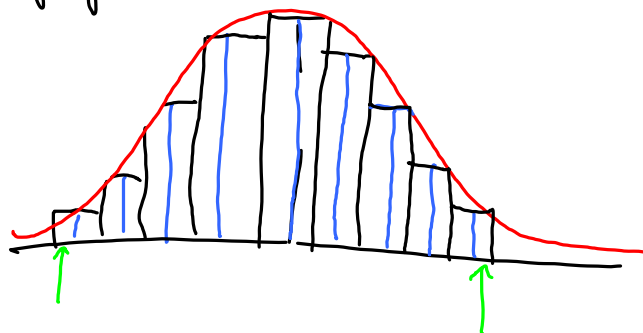
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \Phi(x)$$

tabellierte Werte

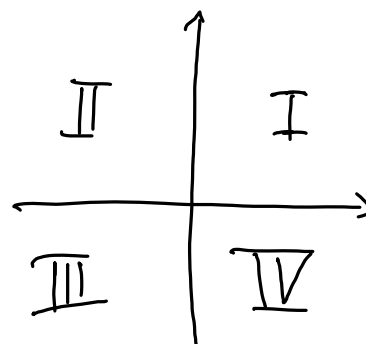
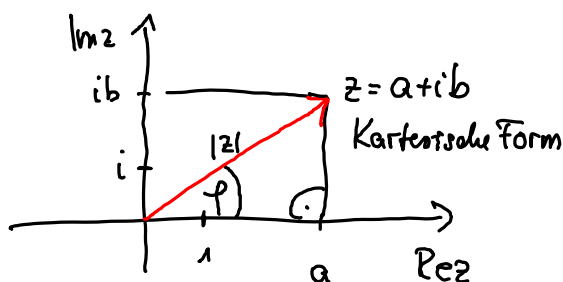
Achtung: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Hinweis auf Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace



Die komplexen Zahlen



Polarkoordinatenform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

$$= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$= \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + i \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b$$

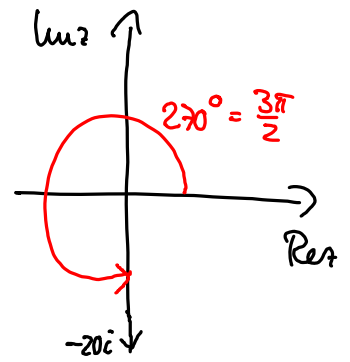
Wichtig: Bp: Lösen Sie folgende Aufgabe

$$z^{10} + 20i = 0$$

$$z^{10} = -20i$$

$$z = \sqrt[10]{-20i}$$

$$= \sqrt[10]{0 - 20i}$$



Wichtig: Potenzieren, Wurzelziehen

DGL

Wichtig: Definition

Mehrdimensionale Analysis

partielle Ableitungen

Extremwerte bestimmen mit und ohne Nebenbed.

Lagrange-Funktion

Totale Differential