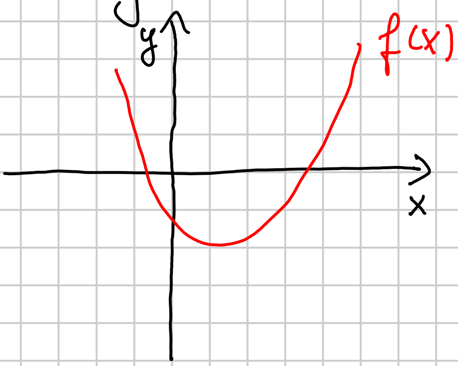
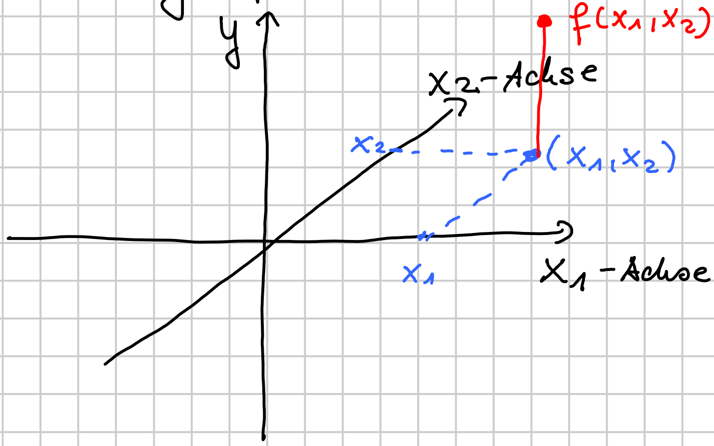
Vorlesung Mathematik 4.6.18

Mehrdimensionale Analysis

Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

WS: $y = f(x)$ $\qquad\qquad$ $y = f(x_1, x_2)$ $\quad$ 3D-Fkt





Bp. Wurfparabel

$$W(\alpha, v_0) = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

W ist Fkt. mit $\boxed{\text{2 Variablen}}$: α und v_0

Def: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$

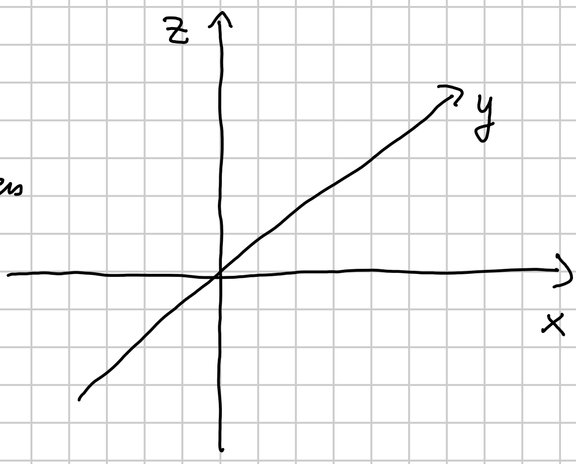
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Spezialfall: $n = 2$ $\qquad$ 3D-Funktionen

$$z = f(x, y)$$

x, y unabhängige Variablen

z abhängige Variable



1) Analytische Darstellung $\quad z = f(x,y)$ explizite Darstellung

$F(x,y,z) = 0$ implizite Darstellung

Bp: $z = f(x,y) = 10x + 5y + 25$
$z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ $\Big\}$ explizit

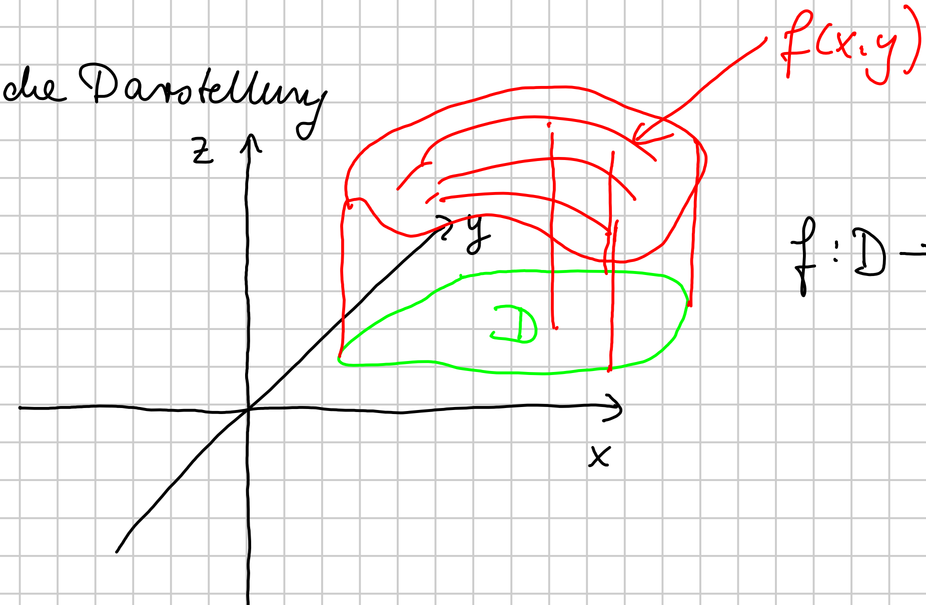
$x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$ implizit

2) Darstellung durch Wertetabelle

$x \backslash y$	y_1	....	-	-	y_n
x_1	z_{11}	z_{12}			
x_2					
x_3					
$\vdots$					
x_n					

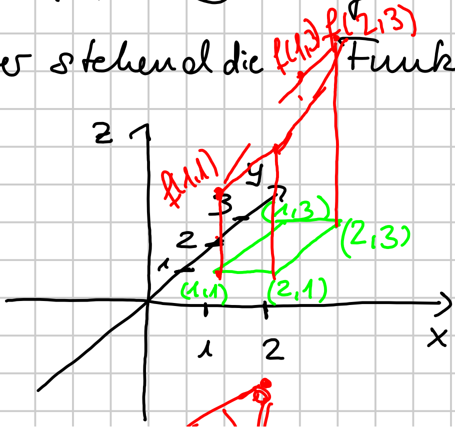
$z_{ik} = f(x_i, y_k)$

3) Graphische Darstellung

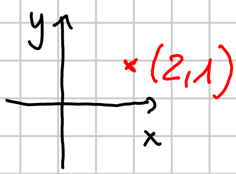


$f: D \to \mathbb{R}$

Den geordneten Punktepaaren aus D (Definitionsebene) werden senkrecht darüber stehend die Funktionswerte zugeordnet.

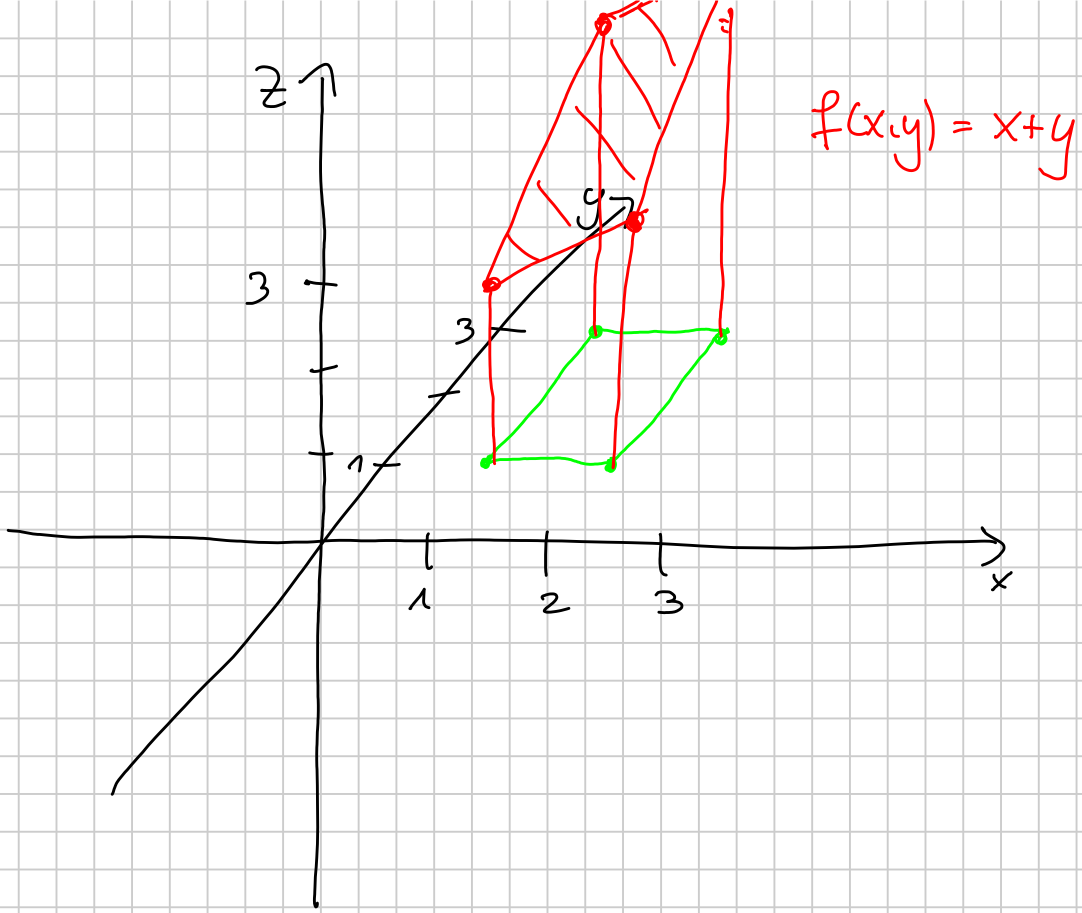


$\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

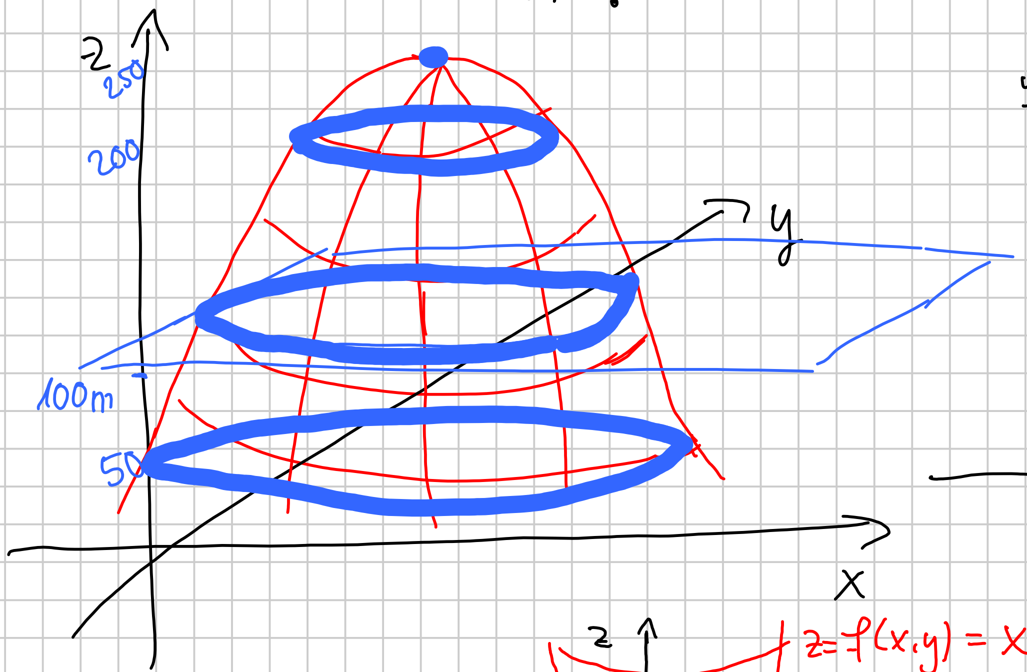


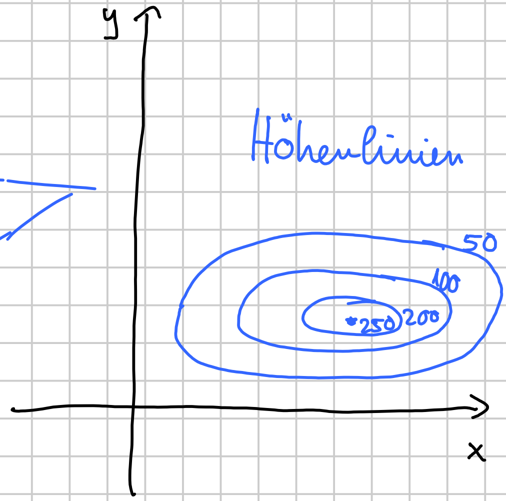
Bp: $f(x,y) = x + y$

$D = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} 1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 3 \end{array} \right\}$

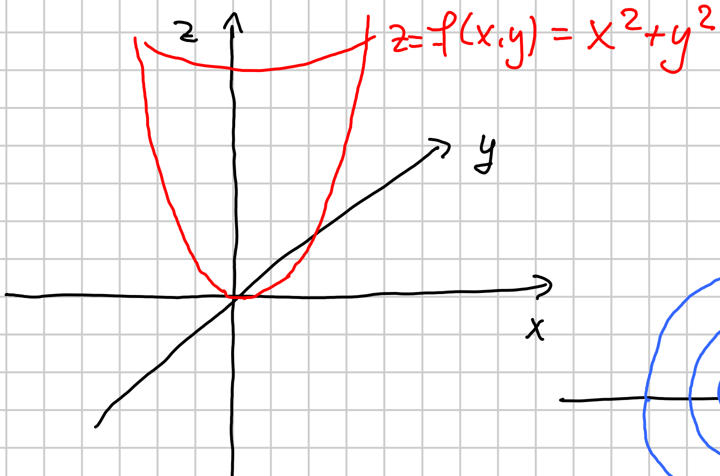


Wie kann man sich einen Überblick verschaffen, wie die 3D-Funktion "aussieht"?



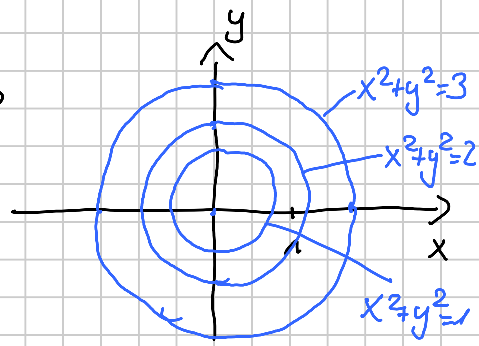


Bp: Höhenlinien



$z = x^2+y^2$

Höhenlinien für $z = 0, 1, 2, 3$



Höhenlinie für $z=3$: $x^2+y^2 = 3$ Kreis um 0 mit Radius $r=\sqrt{3}$

Höhenlinie für $z=2$: $x^2+y^2 = 2$ Kreis um 0 mit $r=\sqrt{2}$

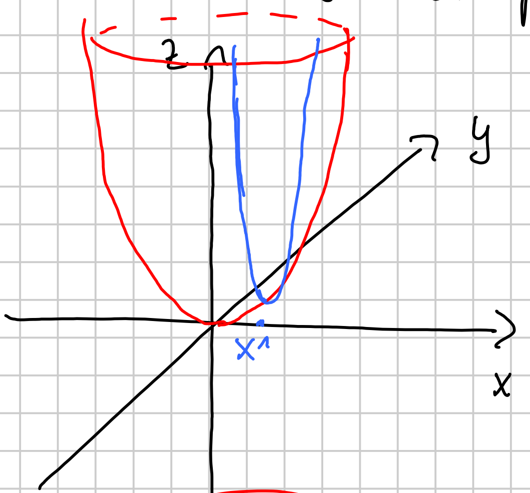
Höhenlinie für $z=1$: $x^2+y^2 = 1$

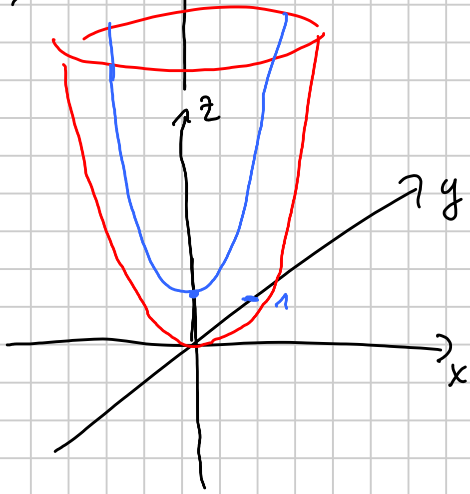
Merke: Höhenlinien sind die Schnittkurven, wenn die Höhenkoordinate z konstant gehalten wird

Weitere Möglichkeiten: "Festhalten" der Koordinaten x bzw y

Schnittkurvendiagramme

Schnitte parallel zur y,z-Ebene bzw x,z-Ebene





$z = x^2+y^2$

1) x "fest" Schnittkurve parallel y-z-Ebene

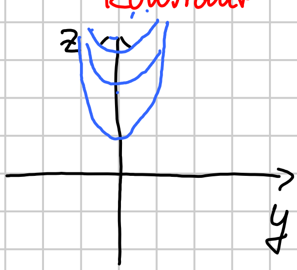
$$z = x_c^2 + y^2$$

konstant

Bp $x=1$

$z = 1^2+y^2$

$z = y^2+1$



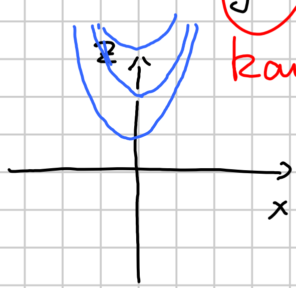
2) y "fest" Schnittkurve parallel zur x-z-Ebene

$$z = x^2 + y_c^2$$

konstant

Bp: $y=1$

$z = x^2+1$



Funktionseigenschaften von 3D-Funktionen

Nullstelle :

hier Nullstellen

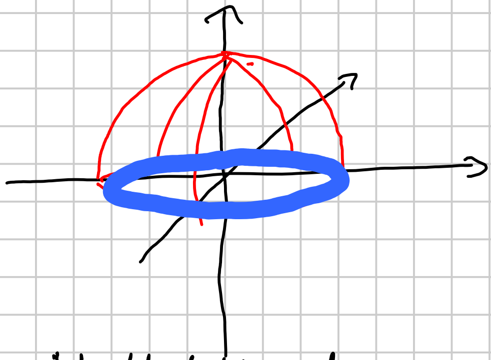
$$z = f(x,y) = 0$$

Schnittkurve mit x-y-Ebene

Bp: $z = x^2 + y^2 - 1$

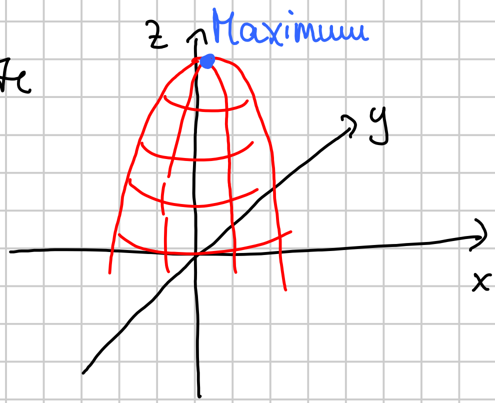
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

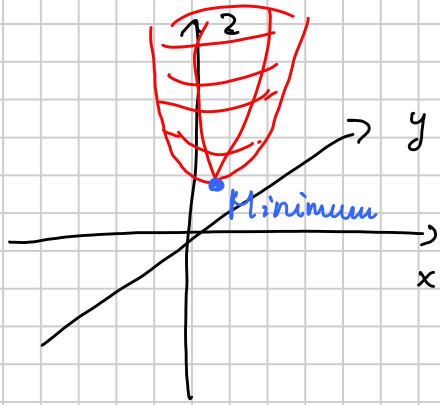
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$



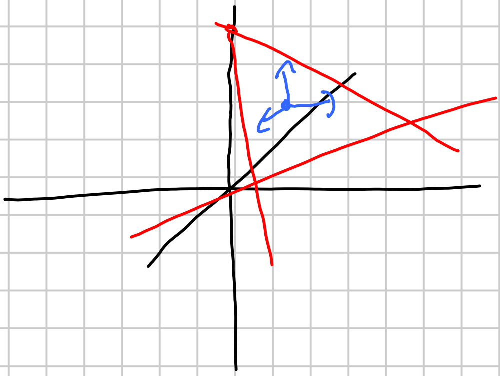
Nullstellen liegen auf einem Kreis um 0 mit Radius 1

Extremwerte





Steigung :



Angabe einer Richtung nötig!