Zufallsvar 1

Mittwoch, 28. April 2021 10:55

Sei X stetige Zuf. Var

$$P(b \le X \le b) = P(X=b) = 0$$

$$\Leftarrow \underbrace{P(X=b)}_{0} + \underbrace{P(b < X \le b)}_{0} = 0$$

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

$$\Leftarrow \underbrace{P(X=a)}_{0} + P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = P(X \le b) - \underbrace{P(X \le a)}_{>0}$$

$$P(X \le a) \qquad >0$$

$$\Rightarrow \quad = P(a < X < b)$$

$$= P(a \le X < b)$$

Bsp: Stundenzeiger Uhr zw. 2 und 3

$$P(2 \le X < 3) = \frac{1}{12}$$

$$= P(2 \le X < 3)$$

$$= P(2 \le X \le 3)$$

Erwartungswert

Mittwoch, 28. April 2021 11:51

X diskret: $E(X) = \sum_n x_n p_n$

X stetig: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \; w(t)\,dt$

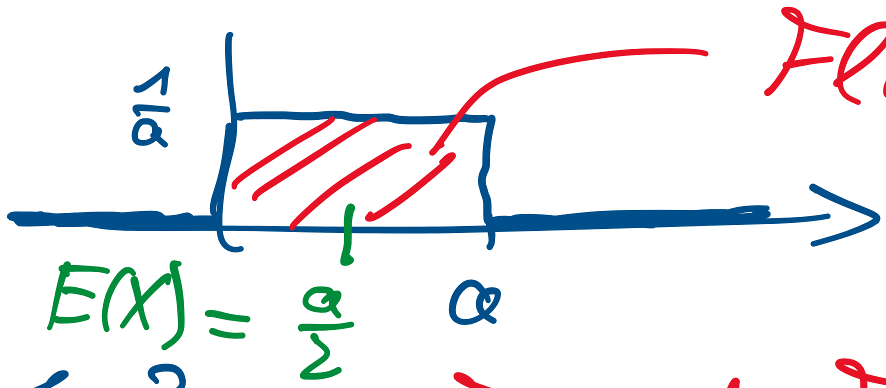
- Summenzeichen wird zu Integral
- x_n wird zur Integrationsvar t
  (könnte auch x heißen
- p_n wird zu $w(t)\,dt$. In der Tat ist $w(t)\,dt$ die (infinitesimale) Wahrsch. dass X zwischen t und $t + dt$ liegt

Ü 1

gl.vert. Zuf.var.

Mittwoch, 28. April 2021 12:06

a) X sei gleichverteilte stetige Zufallsvar in $[0, a]$

$w(t) =$ 

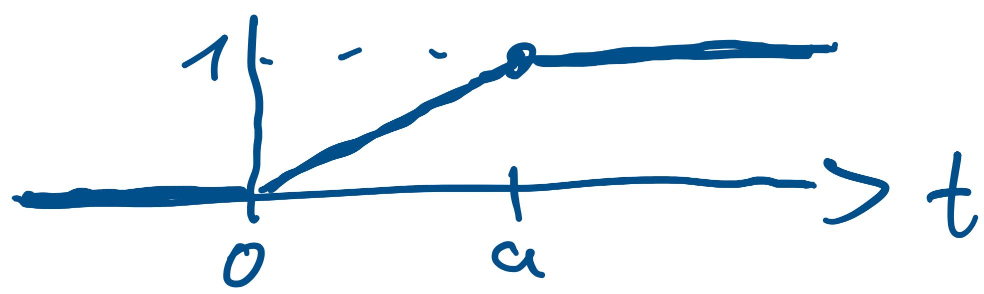
Fläche 1 wg $\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,dt = 1$

Wieso $\frac{1}{a}$? — Damit Fläche $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Verteilungsfkt $F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} w(t')\,dt'$

$= \left[\frac{1}{a} t'\right]_0^t = \frac{t}{a}$ für $0 \le t \le a$ $= \int_0^t w(t')\,dt'$

$F(t) = 1 \quad \forall\, t > a$

$F(t) =$ 

b) $\mu = E(X) = \int_0^a t \, \frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\,\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^a = \frac{1}{a}\,\frac{a^2}{2} = \underline{\underline{\frac{a}{2}}}$

c) $\sigma^2 = Var(X) = E\left((X-\mu)^2\right)$

$= \int_0^a \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{a}}_{w(t)}\,dt$

$= \frac{1}{a}\,\frac{1}{3}\left(t - \frac{a}{2}\right)^3 \Big|_0^a = \frac{1}{a} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{a^3}{8} = \underline{\underline{\frac{a^2}{12}}}$

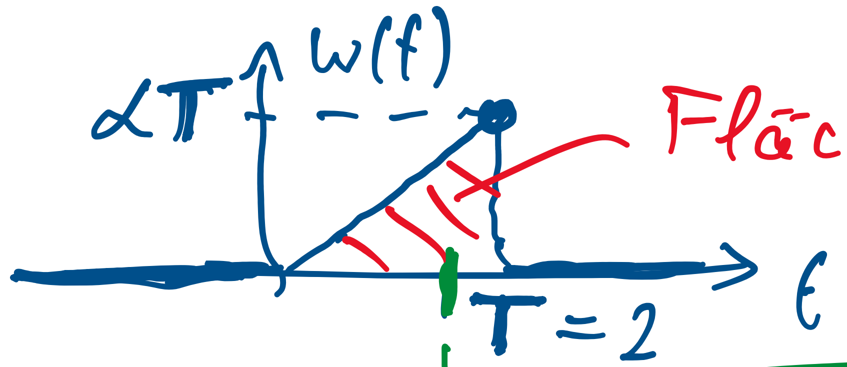
Dreiecks-Zuf.var.

Mittwoch, 28. April 2021 12:21

X sei stetige Zuf. var. mit Wahrsch.-dichte

$$w(t) = \begin{cases} \alpha t & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a)



Fläche 1

$w(T) = \alpha T$

$w(0.5) = \alpha \, 0.5$

$E(X) = 0.\overline{6}\, T$

Wie groß ist α?

(i) Dreiecksfläche $T \cdot \alpha T \cdot \frac{1}{2} = \alpha \frac{T^2}{2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{2}{T^2}}}$$

(ii) $$\int_0^T w(t)\,dt = \int_0^T \alpha t \,dt = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Big|_0^T$$

$$\overset{\shortparallel}{1} = \frac{1}{2}\alpha T^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{2}{T^2}}}$$

b) $$\mu = E(X) = \int_0^T t \cdot \frac{2}{T^2} t \,dt$$

$$= \frac{2}{T^2} \int_0^T t^2 dt = \frac{2}{T^2} \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^T$$

$$= \frac{2}{T^2} \frac{T^3}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3} T}} = 0.\overline{6}\, T$$