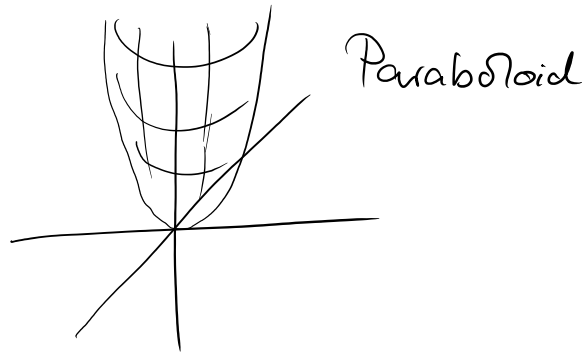


Mehrdimensionale Analysis

Höhenlinien

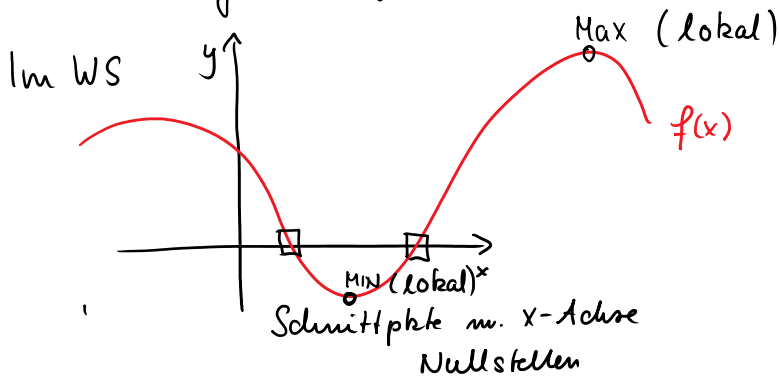
Schnittkurviendiagramm

Bp: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$



Funktionseigenschaften

zunächst $n = 2$ (2 Variablen)



Zu untersuchen:

Extremstellen

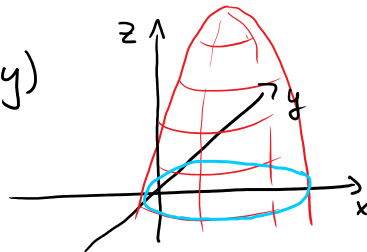
Wendepunkte, konvex, konkav

Schnittpunkte mit den Achsen:
Nullstellen

Steigungsverhalten

Def. bereich, Wertebereich

Nun: $z = f(x, y)$



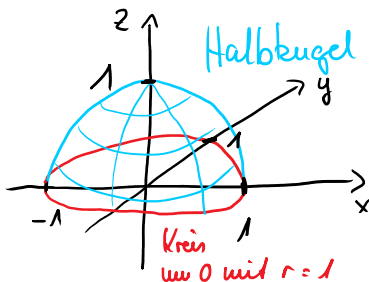
$z = f(x, y) = 0$ Schnittkurve in der $x-y$ -Ebene

Bp: $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$z = 0$: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0 \quad |(\)^2$

$1 - x^2 - y^2 = 0$

$x^2 + y^2 = 1$ Kreis um 0 mit $r = 1$



Erinnerung: $x^2 + y^2 = r^2$

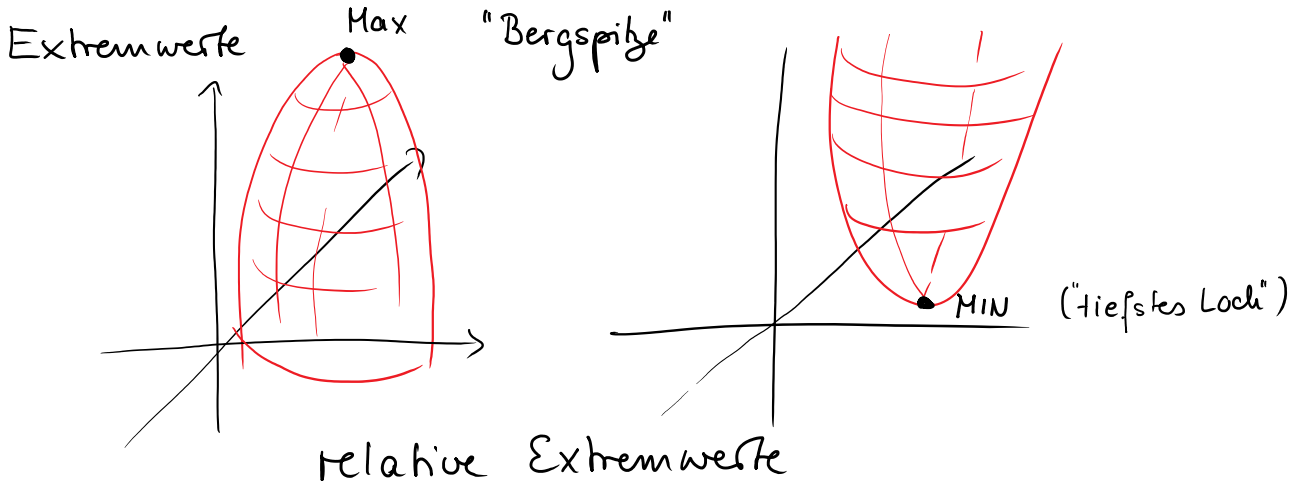
Explizite Darstellung: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ obere Halbkreis

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ unterer Halbkreis

weitere Betrachtung: Höhenlinie für $z = 1$

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1 \quad |(\)^2$

$$1 - x^2 - y^2 = 1 - 1 + x^2 + y^2 \\ \circ = x^2 + y^2 \quad \text{obere Kugelpunkt}$$



Def: relative (lokale) Extremwerte

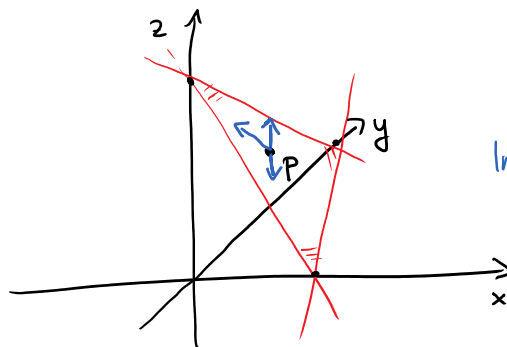
$z = f(x, y)$ besitzt im Punkt (ξ, η) ein Maximum bzw. Minimum

$\Leftrightarrow$ für alle (x, y) einer ε -Umgebung $U_\varepsilon(\xi, \eta)$

gilt: $f(x, y) \leq f(\xi, \eta)$ für alle $x, y \in U_\varepsilon(\xi, \eta)$
(Maximum)

$f(x, y) \geq f(\xi, \eta)$ für alle $x, y \in U_\varepsilon(\xi, \eta)$
(Minimum)

Steigung



Immer notwendig: Angabe einer Richtung,
in die die Steigung
betrachtet werden soll
 $\rightarrow$ gleich noch dazu

Krümmung

konvex, konkav

sind übertragbar

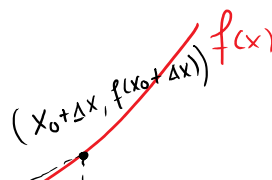
Grenzwerte, Stetigkeit

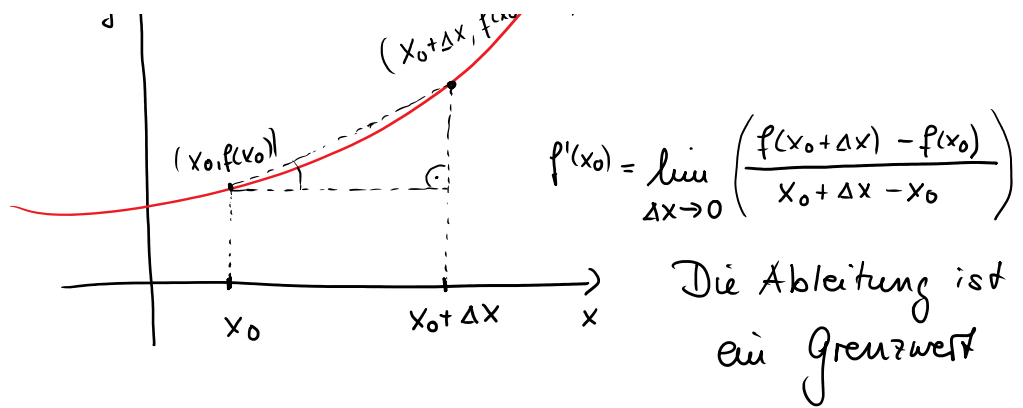
sind auch übertragbar

Jetzt: Ableitungen (Steigungsbestimmung) für $z = f(x, y)$

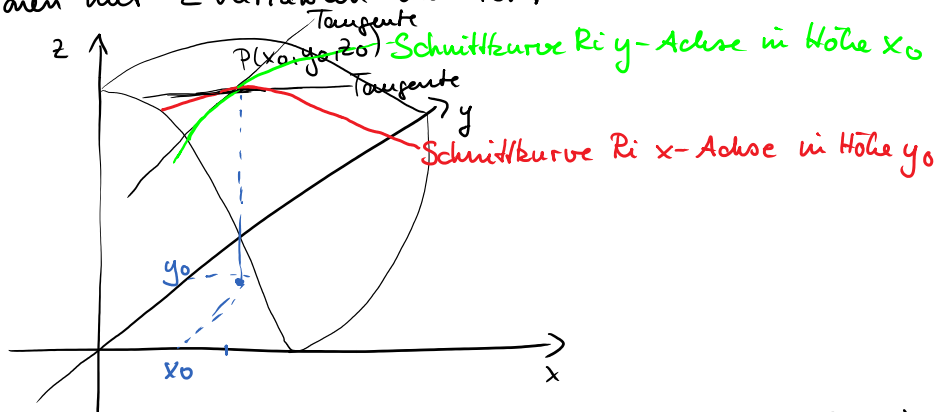
Zur Erinnerung

$y \uparrow$





Funktionen mit 2 Variablen ableiten:



Def: Partielle Ableitung 1. Ordnung für $z = f(x, y)$

a) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$
nach der Variablen x

lautet:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Steigung der Schnittkurve in y-Achsenrichtung

b) Die erste partielle Ableitung der Funktion $z = f(x, y)$
nach der Variablen y

lautet:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Bitte verwenden Sie: f_x , f_y

Def für n unabh. Variablen analog! Hier gibt es n partielle Ableitungen 1. Ordnung

Bp: 1) $z = f(x, y) = e^{x \cdot y}$

$$\left. \begin{aligned} z_x &= f_x(x, y) = y \cdot e^{x \cdot y} \\ z_y &= f_y(x, y) = x \cdot e^{x \cdot y} \end{aligned} \right\} \text{wieder Funktionen mit } 2 \dots n \text{ Variablen}$$

$$\begin{aligned} z_x &= f_x(x,y) = y \cdot e^{x \cdot y} \\ z_y &= f_y(x,y) = x \cdot e^{x \cdot y} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} z_x &= f_x(x,y) = y \cdot e^{x \cdot y} \\ z_y &= f_y(x,y) = x \cdot e^{x \cdot y} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{wieder Funktionen mit} \\ \text{2 unabh. Variablen} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad z &= f(x,y) = x^n \cdot y^m \\ z_x &= f_x(x,y) = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m \\ z_y &= f_y(x,y) = x^n \cdot m \cdot y^{m-1} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} z_x &= f_x(x,y) = n \cdot x^{n-1} \cdot y^m \\ z_y &= f_y(x,y) = x^n \cdot m \cdot y^{m-1} \end{aligned}} \right\} //$$

$$\begin{aligned} 3) \quad z &= f(x,y) = x \cdot \ln y \\ z_x &= f_x(x,y) = \ln y \\ z_y &= f_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} z_x &= f_x(x,y) = \ln y \\ z_y &= f_y(x,y) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y} \end{aligned}} \right\} //$$