Montag, 20. Juni 2022 10:40

Vorlesung 20.6.2022

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Bp: Aus WS Dosenproblem

V war Nebenbed. $V = \pi r^2 \cdot h \overset{Bp}{=} 1\,\ell$

h durch r ausgedrückt

Variablensubstitution

$O(r,h) = \dots$

↓ Rückführung auf Fkt. m. 1 unabh. Var.

Bp. Ein Punkt bewege sich auf Ebene mit der Gleichung: $x+y+z=0$

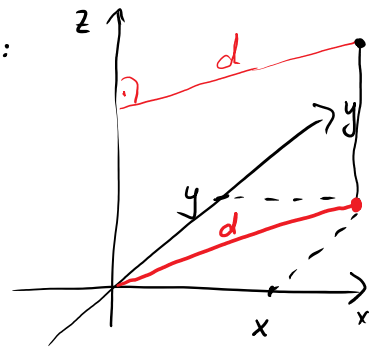
Abstand des Punktes vom Ursprung des 3D-Raumes sei 1

(≙ Er bewegt sich auf einer Kugel um 0 mit $r=1$)

Frage: Welches ist der kleinste und welches ist der größte Abstand des Punktes von der z-Achse?

Extremwertaufgabe mit 2 NB:

Zielfunktion:



d: Abstand von der z-Achse

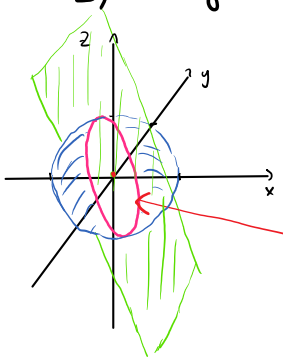
$d = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ Zielfunktion

2 Nebenbed.: 1) P bewegt sich auf Kugel mit $r = 1$

$x^2+y^2+z^2 = 1$

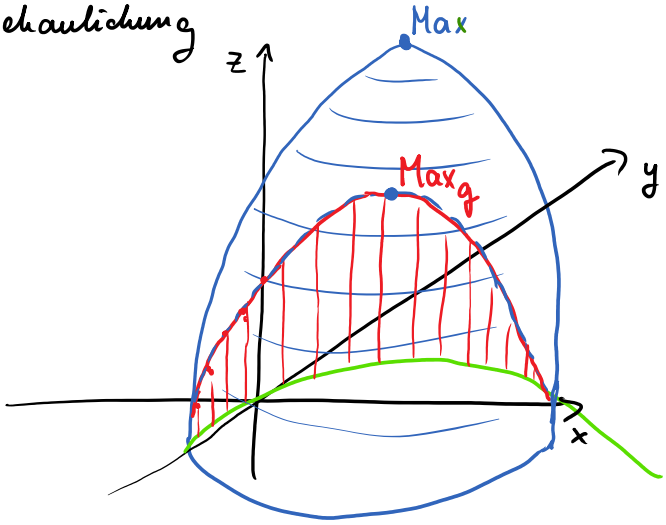
2) P liegt auf Ebene: $x+y+z = 0$



Bahn des Punktes P auf der Ebene

Lösung dieses Problems später!

Veranschaulichung



$g(x,y)=0$ Kurve in der x-y-Ebene
Entscheidungsraums
Restriktion

Möglichkeiten, das Problem zu lösen

1) Variablensubstitution
für Fkt. mit 2 unabh. Variablen und 1 NB
Bp: Dosenproblem

Bp: $z=f(x,y)=-x^2-\frac{1}{2}y^2+4 \qquad D=\mathbb{R}_+^2$

NB: $g(x,y)=2-2x-y=0 \iff y=2-2x$ Def.bes. ist nun eingeschränkt auf eine Gerade

Aufgabe: Lösen Sie mit Hilfe der Variablensubstitution

Substitution $y=2-2x$ ⊛

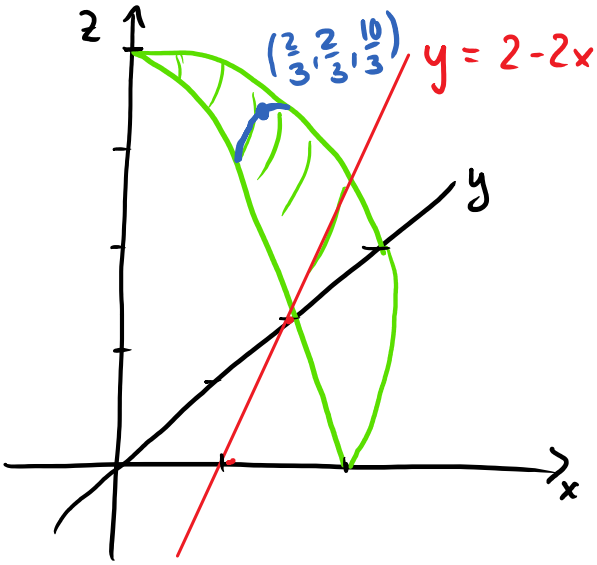
$$z=f(x,y)=-x^2-\frac{1}{2}(2-2x)^2+4 \quad \text{Zielfunktion}$$
$$=-x^2-\frac{1}{2}(4-8x+4x^2)+4$$
$$=-x^2-2+4x-2x^2+4$$
$$=-3x^2+4x+2 \quad \text{Funktion mit 1 unabh. Var.}$$

$f(x)=-3x^2+4x+2$
$f'(x)=-6x+4$
$f''(x)=-6$

$f'(x)=0 \iff -6x+4=0 \iff 6x=4 \iff x=\frac{2}{3}$ ⊛⊛

⊛⊛ in ⊛: $y=2-2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

Max bei $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},f(\frac{2}{3},\frac{2}{3}))$, also bei $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3})$



grobe Skizze!

2) Die Methode von Lagrange

Multiplikatorenregel von Lagrange

Lagrange (1736-1813)

Prinzip: (für 2 unabh. Variablen u. 1 NB)

$z = f(x,y)$ $\quad g(x,y) = 0$

Die Extremwerte von $f(x,y)$ unter der NB $g(x,y)=0$ liegen genau dort, wo

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$ ihre Extremwerte annimmt.

λ: Lagrange-Multiplikator (ist eine Variable)

Notw. Bed:

$$\begin{cases} \text{I}: & L_x(x,y,\lambda) = 0 \\ \text{II}: & L_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \text{III}: & L_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

→ liefert die Kandidaten

Bem: $L_\lambda = 0$ liefert: $g(x,y) = 0$ (Nebenbedingung)

Bp: $z = f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 \qquad D = \mathbb{R}^2_+$

$g(x,y) = 2 - 2x - y = 0$ Achtung: NB muss implizit (also noch Dauf gelöst) vorliegen!

$L(x,y,\lambda) = -x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 4 + \lambda(2 - 2x - y)$

Notw. Bedingungen: I $L_x = -2x - 2\lambda = 0$

II $L_y = -y - \lambda = 0$

III $L_\lambda = 2 - 2x - y = 0$

Aus I: $-2x - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow -2x = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = -x$

Aus II: $-y - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -y$

$\left.\begin{matrix}\lambda = -x \\ \lambda = -y\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$ (*)

(*) in III: $2 - 2x - x = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Kandidat: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

ÜA für zu Hause:

Dosenproblem: $V = 1$ Liter, Oberfläche minimieren mit der Methode von Lagrange lösen

Die Methode von Lagrange bei Funktionen mit n unabh. Variablen und k Nebenbedingungen

$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ Zielfunktion

$z_j = g_j(x_1, \ldots x_n) = 0 \quad j = 1, \ldots k$ k Nebenbed.

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_k)$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$$

$$\Leftrightarrow L(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k) = f(x_1, \ldots x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x_1 \ldots x_n)$$

n+k Variablen

Notwendige Bed.: $L_{x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots n)$

$L_{\lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots k)$ } n+k Gleichungen

liefert genau die Nebenbedingungen