

Orga 1) 9 Uhr ü 20-25 TN } besser verteilen!
 13 Uhr ü 3-8 TN }

2) Interesse an Tutoren-Job
 → mir eine Email schicken

DGL: Gleichungen die Fkt $y(t)$ und ihre Ableitungen $y'(t)$, $y''(t)$, ... beinhalten

Typisierung • Ordnung: höchste Ableitung
 • linear / nicht linear

nur bei linear { • homogen / inhomogen (Term ohne $y^{(i)}$)
 • konst. Koeff oder nicht

Aktivierung lineare DGL:

	Antwort 1	Antwort 2
a) $x''(t) = x(t)$	e^t	0-Fkt (ist nicht so interessant) $e^{-t} : x'(t) = -e^{-t}, x''(t) = e^{-t}$ $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$
b) $x''(t) = ax(t)$ $a \in \mathbb{R}^+$	$e^{\sqrt{a}t}$ $e^{-\sqrt{a}t}$	$x'(t) = \sqrt{a} e^{\sqrt{a}t}, x''(t) = a \underbrace{e^{\sqrt{a}t}}_{x(t)}$
c) $x''(t) = -x(t)$	$\sin(t)$ $\cos(t)$ e^{it}	$\cos(t) + i\sin(t) = e^{it}$ $\longrightarrow x'(t) = i e^{it}, x''(t) = i^2 e^{it} = -e^{it} = -x(t)$
d) $x''(t) = -\alpha x(t)$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$	$e^{i\sqrt{\alpha}t}$ $\sin(\sqrt{\alpha}t)$ $\cos(\sqrt{\alpha}t)$	

zu Satz 12-3 Nr 1

Wir setzen den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$
 $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$
 $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$
 $\vdots$

in die DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0$$

ein und erhalten

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)}_{\text{Polynom } P(\lambda) \text{ n. Ordnung}} e^{\lambda t} = 0$$

Polynom $P(\lambda)$ n. Ordnung

$P(\lambda) = 0$: hat n Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$\Rightarrow x_i(t) = e^{\lambda_i t}$ ist eine der n Lösungen, $i=1, \dots, n$

Bsp radioaktiver Zerfall

$$x'(t) = -0.05 x(t) \quad \text{Wie lautet } x(t), \text{ wenn } x(0) = 4 \text{ gelten soll}$$

Lsg Ansatz $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$$\lambda e^{\lambda t} = -0.05 e^{\lambda t} \quad | : e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda = -0.05$$

$$\Rightarrow \text{allg. Lösung } x(t) = c_1 e^{-0.05t}$$

$$x(0) = c_1 = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 4 e^{-0.05t}}$$

spez. Lsg.

- a) allg Lsg von $x''(t) + 4x(t) = 0$ ermitteln
 b) nach Nr. 3: allg Lsg in reeller Form
 c) spez. Lsg für $x'(0) = 0.5$, $x(0) = 0.5$ in reeller Form

Lsg a) $x(t) = e^{\lambda t}$ in DGL einsetzen

$$x''(t) + 4x(t) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4 e^{\lambda t} = 0 \quad | : e^{\lambda t}, \text{ immer } \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -4 = 4i^2$$

$$\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

$\Rightarrow$ Lösungen der DGL sind $x_1(t) = e^{2it}$, $x_2(t) = e^{-2it}$

S12-3 Nr 2
 $\Rightarrow$ $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
 ist allg. Lsg

b) Nach S12-3 Nr 3 ist allg. Lsg in reeller

$$a \operatorname{Re}(x_1(t)) + b \operatorname{Im}(x_1(t))$$

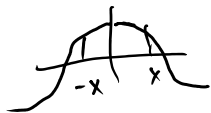
$$x(t) = \underline{a \cos(2t) + b \sin(2t)}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(e^{2it}) = \cos(2t) \\ \operatorname{Im}(e^{2it}) = \sin(2t) \end{cases}$$

Wieso $x_1(t)$? Weil $x_2(t)$ keine neue

Lsg beiträgt: $\operatorname{Re}(e^{-2it}) = \cos(-2t) = \cos(2t)$

$$\operatorname{Im}(e^{-2it}) = \sin(-2t) = -\sin(2t)$$



c) Suche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $x'(0) = 0.5$
 $x(0) = 0.5$ erfüllt

$$x(t) = a \cos 2t + b \sin 2t$$

$$x(0) = a \cos 0 = \underline{a = 0.5}$$

$$x'(t) = -2a \sin 2t + 2b \cos 2t$$

also

$$0.5 = 0 - 2b \sin 0 + 2b \cos 0 \Rightarrow b = 0.25$$

$$x(t) =$$

$$\cos u = \cos - 0.5$$

$$-1 \quad \underline{\underline{v = 0.25}}$$

$$x_{\text{spek}}(f) = 0.5 \cos(2f) + 0.25 \sin(2f)$$

Übung 2

$$x''(t) + 4x'(t) + 404x(t) = 0$$

Ansatz $e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 404 e^{\lambda t} = 0$$

 $| : e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 2^2 - 2^2 + 404 = 0$$

quadr.
Ergänzung

$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 + 400 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2)^2 = -400 \quad | \checkmark$$

$$\Rightarrow \lambda + 2 = \pm 20i$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1,2} = -2 \pm 20i}}$$

$$\underline{\underline{x_1(t) = e^{(-2+20i)t}, \quad x_2(t) = e^{(-2-20i)t}}}$$