

Vorlesung Mathematik 2

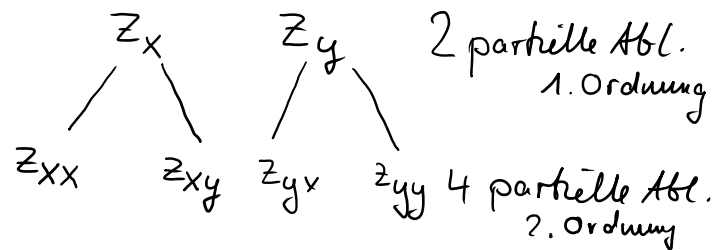
7.6.23

Steigung bei 3D-Funktionen : 2 Steigungen

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

1 Variable : $y = f(x) \rightarrow y' = f'(x) \rightarrow y'' = f''(x)$

2 Variablen : $z = f(x, y)$



z_{xx}

z_{yy}

direkte Ableitungen

z_{xy}

z_{yx}

gemischte Ableitungen

Frage : $z = f(x, y)$ Wieviele partielle Ableitungen 3. Ordnung gibt es?

Antwort: Es gibt 8 partielle Ableitungen 3. Ordnung

Frage : $z = f(x_1, \dots, x_n)$ Fkt. m. n unabh. Var.

Anzahl der part. Abl. 2. Ordnung? n^2

Anzahl der part. Abl. m-ter Ordnung? n^m

Satz von Schwarz

Ist eine Funktion mit n unabh. Variablen

m -mal differenzierbar, so sind die gemischten partiellen Abl. m -ter Ordnung unabhängig von der Reihenfolge des Differenzierens.

Bp: $z = f(x, y) = x^2 \cdot y + 2x^5 \cdot y$ Ableitungen 2. Ordnung

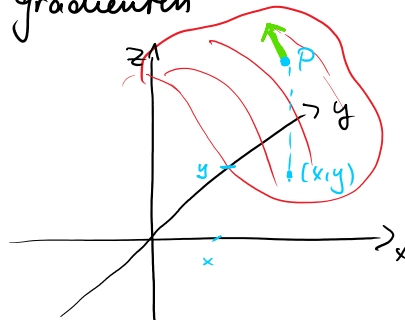
$$z_x(x, y) = 2xy + 10x^4 y \quad z_{xx} = 2y + 40x^3 y$$

$$z_y(x, y) = x^2 + 2x^5 \quad z_{yy} = 0$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= 2x + 10x^4 \\ &= z_{yx} = 2x + 10x^4 \end{aligned}$$

Satz von Schwarz

Bedeutung des Gradienten



der Gradient wird als Vektor aufgefasst und in den "Flächenpunkt" verschoben: Der Vektor zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrates.

Frage aus dem Publikum:

z_{xyx} andere Schreibweise?

Ja, z.B. $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$

Achtung: keine "Striche"
nicht: ~~z''~~

Def:

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

Hesse'sche Matrix
Jacobi'sche Matrix
Funktionalmatrix

Frage: Eigenschaften der Hessematrix?

$H(x)$ ist quadratisch

$H(x)$ ist symmetrisch (folgt aus dem Satz von Schwarz)

Bp: $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 \cdot x_3 + x_3$

Stellen Sie die Hesse-Matrix auf:

$$H(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_3 & 2x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2 x_3 \\ x_2^2 + 1 \end{pmatrix}$$

(3x1) Matrix

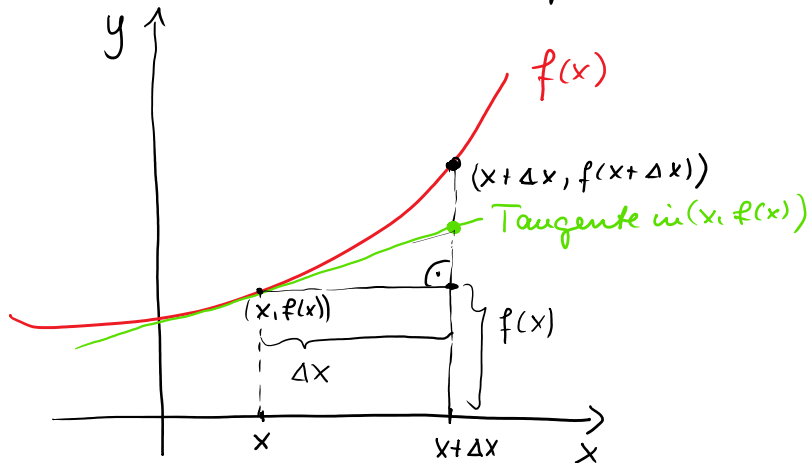
3x3-Matrix

Es interessiert der Wert an der Stelle (1, -1, -1):

$$\text{grad } f(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Partielles und totales Differential



$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \text{ Differentialquotient}$$

$$f(x, x+\Delta x) \text{ Funktionswert}$$

Auf der Tangente im Punkt $(x, f(x))$ ist der zugehörige Fkt. wert: $f(x) + \underline{f'(x) \cdot \Delta x}$

$$\text{Es gilt: } f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Man hat $f(x)$ linearisiert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x+\Delta x) - f(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} \cdot \Delta x$$

$$\text{Setze: } df = f'(x) \cdot dx$$

df heißt das Differential der Funktion $f(x)$

Das Differential ist die infinitesimale Wirkung der infinitesimalen
(unendlich kleine) Änderung dx der Variablen x